

ANNALEN  
DER  
PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON  
P. A. SCHUBERT, L. W. GILBERT, J. C. FÖRSTER, L. A. S. SCHUBERT, J. SCHUBERT.

VIERTHE FOLGE.  
BAND 23. HEFT 1.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIO BARTH.

KURATORIUM:

F. KÖHLBRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,  
W. C. RÖNTGEN, H. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

VERWALTUNG:

W. WIEN UND H. PLANCH.



LEIPZIG, 1907.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIO BARTH.  
ROSEPLATZ 17.

*Bestellungen auf die „Annalen“ werden an alle Buchhandlungen, an die Postämter und an die Verlagsbuchhandlung in Leipzig, Leipzig 17, an die 17. Postfach (= 1. Briefkasten) zugewiesen.*

# Inhalt.

1. Martin Gildemeister. Über das Verschwinden der Magneti- sierung . . . . .	391
2. W. Wien. Über die absolute, von positiven Ionen ausgestrahlte Energie und die Entropie der Spektrallinien . . . . .	415
3. H. Haga. Über die Polarisation der Röntgenstrahlen und der Sekundärstrahlen . . . . .	429
4. H. Haga. Über einen merkwürdigen Fall von selektiver Ab- sorption bei Röntgenstrahlen . . . . .	445
5. Rudolf Ladenburg. Über den Einfluß von Wänden auf die Bewegung einer Kugel in einer ruhenden Flüssigkeit . . . . .	447
6. W. Hallwachs. Über die lichtelektrische Ermüdung . . . . .	459
7. Bernhard Löffler. Wann und auf welchem Wege' be- stehen suspendierte Teilchen Gewicht und Auftrieb einer Flüssigkeit? . . . . .	517
8. G. Bakker. Theorie der gekrümmten Kapillarschicht . . . . .	539
9. Karl Tangl. Über die Dielektrizitätskonstante der Luft bei hohem Druck . . . . .	559
10. O. Grottrian. Die magnetische Induktion in Rotationskörpern bei homogenem Felde, behandelt nach einem Näherungsver- fahren auf experimentell-geometrischer Grundlage . . . . .	575
11. Rudolf Laemmle. Der Inhalt der Gleichung $p \cdot s = B \cdot T$ . . . . .	591
12. H. Ersle. Berechnung der Loschmidt'schen Zahl aus den Konstanten der Dispersionsformel . . . . .	594
13. Olofens Schaefer und Max Langwitz. Zur Lambchen- Gittertheorie . . . . .	599

Die Redaktion der Annalen wird von dem umsichtig genannten Herren  
beurteilt. Dem geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien  
übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse  
ist: Geh. Hofrat Prof. Dr. W. Wien, Würzburg, Fleischerstr. 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in  
den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu  
überschreiten.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den  
Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manu-  
skript selbst einzuschieben). Da die Figuren fortan möglichst in den  
Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau  
anzugeben, wo sie hingehören.

Stichwörter sind am Rande oder unten auf dem Seiten des Manuskriptes  
(nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fort-  
schritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens,  
der Band-, Seiten- und Jahreszahl anzuführen.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit  
kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies  
bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf deren  
unterer Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffen-  
den Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhand-  
lungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist  
ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

# ANNALEN DER PHYSIK.

## VIERTE FOLGE. BAND 23.

### 1. Über das Verschwinden der Magnetisierung; von Martin Gildemeister.

#### I. Fragestellung. Methode.

Wenn sich Eisen in einem magnetischen Feld befindet, dessen Intensität plötzlich ansteigt oder abfällt, so nimmt es, wie J. A. Ewing und Lord Rayleigh entdeckt haben, den entsprechenden magnetischen Zustand nicht sofort an, sondern erst nach einigen Minuten. Die eintretende Veränderung scheint nach Untersuchungen von Martens<sup>1)</sup>, Klemenčič<sup>2)</sup> u. a. aus zwei Teilen zu bestehen, einem sehr schnell und einem langsam verlaufenden, zwischen denen eine Pause liegt. Der zweite Teil ist gründlich erforscht, während über den ersten nur wenige Untersuchungen gemacht sind.

Helmholtz<sup>3)</sup> hat bei verschwindendem magnetischen Felde gefunden, daß in dünnen (0,028 cm) Drähten aus weichem Eisen „sich die Gleichgewichtszustände der magnetischen Verteilung in unmeßbar kurzer Zeit herstellen können“. Aus den Angaben geht hervor, daß unter unmeßbar kurzer Zeit weniger als  $\frac{1}{10000}$  Sek. zu verstehen ist; eine genauere Bestimmung ließ sich mit Hilfe der benutzten Wippe nicht ausführen.

Holborn<sup>4)</sup> hat im Gegensatz zu Helmholtz die *Entstehung* der Magnetisierung bei *Schließung* des magnetisierenden Stromes untersucht. Dabei ergab sich das Resultat, daß der Magnetismus voll ausgebildet war, wenn der Strom seine volle Höhe erreicht hatte (nach  $\frac{1}{200}$  Sek.). Aus der Art des Ansteigens war aber zu schließen, daß die Magnetisierung auch noch in viel kleineren Zeiträumen der magnetischen Kraft sehr nahe folgt.

Beiden Untersuchern sind die späteren langsamen Ver-

1) F. Martens, Wied. Ann. 60. p. 61. 1897.

2) J. Klemenčič, Wied. Ann. 62. p. 68. 1897; vgl. auch A. Winkelmanns Handb. d. Physik; II. Aufl. 5. 1. Hälfte, p. 222.

3) H. v. Helmholtz, Pogg. Ann. 83. p. 505. 1851.

4) L. Holborn, Berliner Ber. 11. p. 173. 1896.

änderungen der magnetischen Induktion entgangen, weil sie sich ballistischer Methoden bedienten.

Die vorliegende Untersuchung beschäftigt sich nur mit dem *Abfall* der Magnetisierung nach dem Verschwinden des magnetischen Feldes. Es soll ermittelt werden, in welcher Weise sich der Magnetismus *unmittelbar* (d. h. zwischen 0 und  $\frac{1}{2000}$  Sek.) nach der Stromöffnung ändert.

Die angewendete Methode ist dieselbe, deren sich Helmholtz in der zitierten Arbeit bedient hat. Ihr Prinzip ist folgendes:

Um den Einfluß der Foucaultschen Ströme möglichst zu beseitigen, werden Bündel von dünnem Eisendraht verwendet. Diese stecken in einer Spirale, die ein elektrischer Strom durchfließt. Unterbricht man denselben, und verbindet in dem gleichen Augenblick die Spirale mit einem ballistischen Galvanometer, so ergießt sich in dieses ein Strom, der aus drei Anteilen besteht: 1. aus dem Öffnungsinduktionsstrom der Spirale; 2. aus dem Strom, der in ihr durch den verschwindenden Magnetismus des Eisens induziert wird; 3. aus einem Stromanteil, der von der Kapazität der Spirale herrührt.

Läßt man jetzt zwischen dem Moment der Stromöffnung und der Ableitung zum Galvanometer eine sehr kleine Zeit  $\vartheta$  vergehen, so ist in dieser die Summe der drei Teile, und damit auch die Wirkung auf die Bussole kleiner geworden. Derjenige Wert von  $\vartheta$ , bei dem das Galvanometer schließlich nicht mehr bewegt wird, ist die Zeit, welche der Magnetismus<sup>1)</sup> zum völligen Verschwinden braucht.

Aus dem Abfall der Galvanometerausschläge können, wie die theoretische Behandlung p. 409 u. f. zeigt, noch weitere für die gestellte Aufgabe wichtige Schlüsse gezogen werden.

## II. Benutzte Apparate. Konstanten der Spirale und der Drahtbündel.

Die einzige Schwierigkeit der Methode liegt darin, daß zwischen der Öffnung des einen und der Schließung des anderen

1) Der temporäre Magnetismus ist in drei Teile zerlegt zu denken: a) den rasch verschwindenden, b) den langsam verschwindenden, c) den remanenten. Unter Magnetismus schlechtweg ist hier immer Teil a zu verstehen.



Stromkreises eine äußerst kurze und genau meßbare Zeit liegen muß. Das erreichte ich mit einem Helmholtzschen Pendel von großer Präzision, gefertigt von Edelmann in München.<sup>1)</sup> Der eine Kontakt blieb an seiner Stelle; der andere wurde durch eine Mikrometerschraube verschoben, deren Kopf in 100 Teile geteilt war. Die Verschiebung um einen Teilstrich änderte das Intervall  $\vartheta$  zwischen beiden Vorgängen um 0,00000165 Sek. (abgerundet  $\frac{1}{600\,000}$  Sek.). Diese Zeit ist in den Tab. 2, 3 und 4 und der Fig. 2 als Einheit eingetragen.

Das Galvanometer war ein Drehspulengalvanometer von Siemens & Halske, Widerstand der Spule allein ca. 400 Ohm, mit Zusatzwiderstand, ohne den die Bewegung äußerst stark gedämpft ist, 10000 Ohm. Dauer einer Schwingung (halbe Periode) 6 Sek. Ballistische Empfindlichkeit bei den ersten Versuchen ( $a$  bis  $e$  der Tab. 3) 2044 Skt., nachher (Versuche  $f$  bis  $s$ ) 975 Skt. pro Mikroculomb (geringerer Skalenabstand). Selbstpotential etwa  $3 \cdot 10^7$  cm.

Die Spirale bestand aus  $2 \times 69$  Windungen eines gut isolierten Kupferdrahtes von 0,3 mm Durchmesser, der in einer Lage, aber nach Helmholtzscher Vorschrift (zur leichten Prüfung der Isolierung) in zwei Abteilungen auf einen Glaszylinder gewickelt war, und zwar so, daß auf eine Windung der einen immer eine der anderen Abteilung folgte. Die Abteilungen konnten auch getrennt benutzt werden. Die Länge der Spirale betrug 10, ihr Durchmesser 2,4 cm. Beide Abteilungen hintereinander geschaltet hatten ein Selbstpotential von  $10^5$  cm und einen Widerstand von 1,2 Ohm; über ihre Kapazität vgl. p. 410.

Die zylindrischen Drahtbündel waren zum Teil beträchtlich länger als die Spirale, so daß auf sie kein homogenes magnetisches Feld wirkte. Sie zu verkürzen war nicht angängig, weil dann die Galvanometerausschläge stark verkleinert worden wären; eine Verlängerung der Spule hätte wiederum deren Selbstpotential und Kapazität in störender Weise vergrößert. Die Bündel waren aus weichem Eisendraht hergestellt, gegläht und mit Paraffin durchtränkt. Ihre Dimensionen sind aus der Tab. 1 zu ersehen.

1) M. Th. Edelmann, Ann. d. Phys. 3. p. 274. 1900; M. Gilde-  
meister u. O. Weiss, Ann. d. Phys. 17. p. 174. 1905.

Tabelle 1.

Konstanten der Drahtbündel.

Nr.	Länge cm	Durchm. cm	Gewicht g	Drahtstärke cm
I	12,5	0,55	13	0,0185
II	34	1,45	288	0,0185
III	32	0,90	80	0,028
IV	38,5	1,25	224	0,118

## III. Versuchsanordnung. Vorversuche.

Die Versuchsanordnung ist in Fig. 1 dargestellt.  $E$  ist eine Akkumulatorzelle,  $Rh$  ein Rheostat,  $Sp$  die Spirale,  $G$  das Galvanometer.  $\check{O}K_1$  ist der Öffnungs-,  $SK$  der Schließkontakt des Pendels. Über  $\check{O}K_2$  vgl. p. 405.

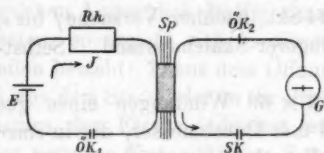


Fig. 1.

Vor jeder Versuchsreihe mußte die Nullstellung des Pendels festgestellt werden, d. h. diejenige Stellung, bei der Öffnung und Schließung gleichzeitig erfolgen. Dazu wurden die Kontakte mit dem Element und dem Galvanometer (ohne die Spirale) in einen Stromkreis aufgenommen und diejenige Stellung aufgesucht, bei der die Ausschläge eben verschwanden.<sup>1)</sup> Man kann auch einfach die Nullstellung aus den Versuchen entnehmen, da bei ihr der Maximalausschlag des Galvanometers erfolgt.

Der durch  $E$ ,  $Rh$ ,  $Sp$  und  $\check{O}K_1$  fließende magnetisierende Strom  $J$  konnte nur in engen Grenzen, zwischen 0,020 und 0,078 Amp., variiert werden. Diese Beschränkung war geboten nach oben durch die störende Erwärmung des Öffnungskontaktes, nach unten durch die Empfindlichkeit des Galvanometers.

Die Vorversuche lehrten, daß die Drahtbündel schon nach  $\frac{1}{60000}$  Sek. ihre induzierende Wirkung auf die Spirale

1) Über eine zweckmäßige Modifikation des Verfahrens vgl. M. Gildemeister u. O. Weiss, l. c.

verlieren. Ein solcher Versuch ist zum Beweise für das genaue Arbeiten des Pendels mit allen Einzelheiten in Tab. 2 dargestellt. Bei den späteren Versuchen (Tab. 3), bei denen für jedes  $\vartheta$  nur drei Beobachtungen angestellt sind, wird nur das Mittel daraus mitgeteilt werden.

Tabelle 2.

Verschwinden des Magnetismus in Bündel II.

0,078 Amp. Beide Abteilungen der Spirale. Einheit der  $\vartheta = \frac{1}{1000000}$  Sek.

$\vartheta$	Ablenkungen in Skalenteilen					Mittel
- 9	3,5	3,25	3,5	3,25	3,5	3,40
- 4	4,75	4,75	4,5	4,5	4,75	4,65
- 2	5,0	5,0	5,25	5,0	5,0	5,05
0	5,5	5,0	5,5	5,75	5,5	5,45
+ 2	4,0	4,25	3,75	4,0	4,5	4,10
+ 4	5,0	3,0	5,0	1,75	3,5	3,65
+ 6	0,25	0,25	0,25	0,5	0	0,25
+ 8	0	0	0,25	0	0	0,05
+11	0	0	0	0	0	0
+16	0					
+21	0					

Wie man sieht, überschreiten die Ablenkungen trotz der verhältnismäßig hohen Stromstärke und der großen Eisenmasse des Bündels II nicht die Größe von 5,5 Skt. Da infolgedessen die Untersuchung der kleineren Bündel oder gar der leeren Spirale keine Aussichten auf Erfolg bot, wurde die in Fig. 1 skizzierte Versuchsanordnung geändert.

Die Theorie lehrt, daß die Ausschläge mit der Abnahme des Widerstandes im Bussolkreise wachsen. Daher ist es zweckmäßig, den Zusatzwiderstand des Galvanometers zu entfernen. Dann ist aber das Instrument so stark gedämpft, daß es unbrauchbar wird. Diese Schwierigkeit kann man umgehen, wenn man einen zweiten Öffnungskontakt ( $\ddot{O}K_2$ , Fig. 1) anbringt und diesen kurze Zeit nach der Schließung von  $SK$  öffnet.

Zu diesem Zwecke trug das Eisenprisma des Pendels eine Stange und die linke vordere Säule ein Tischchen mit



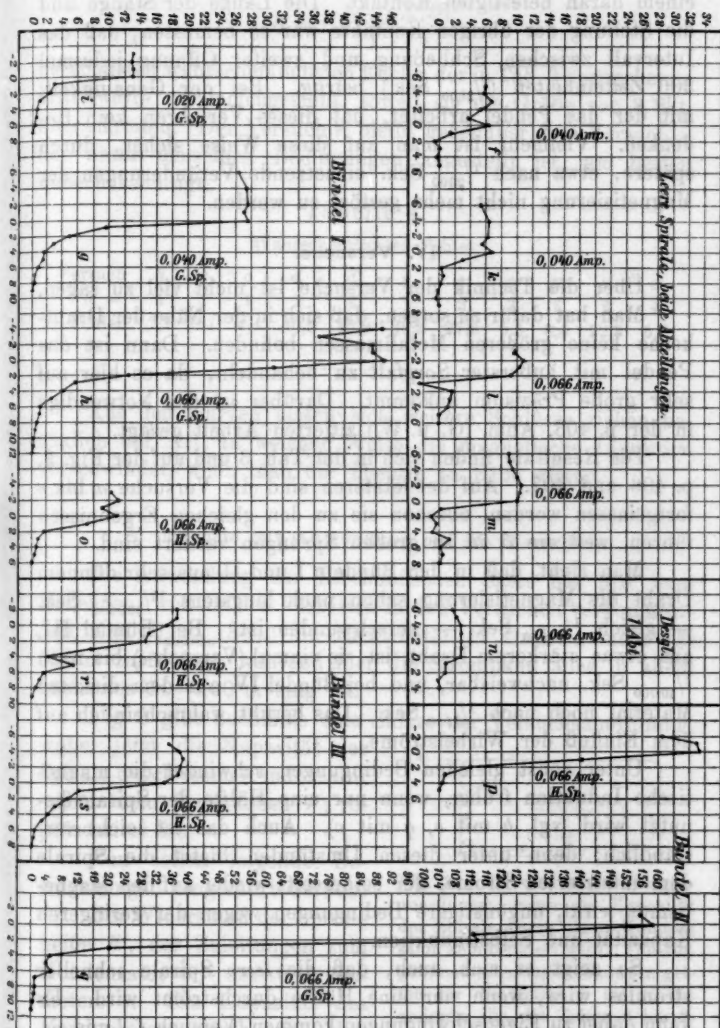


Fig. 2. Graphische Darstellung der Tab. 8. Die Ordinaten sind Skalenteile, die Abszissen Zeiten. Im übrigen vgl. Tab. 8.

einem daran befestigten Kontakt. Die Länge der Stange und die Stellung der übrigen Kontakte war so bemessen, daß das Intervall zwischen Schließung und zweiter Öffnung jedesmal 300 Zeiteinheiten ( $\frac{1}{2000}$  Sek.) betrug. Bei der Genauigkeit, mit der das Pendel arbeitet, hat dieses Verfahren kein Bedenken. Vielmehr ist man auf diese Weise sicher, durch spätere, etwa nach  $\frac{1}{2000}$  Sek. einsetzende Veränderungen der Magnetisierung nicht mehr gestört zu werden.

#### IV. Versuche.

Über die Technik der Versuche ist nicht viel zu sagen.

Man hat dafür zu sorgen, daß sich in der Nähe der Drahtkerne keine größeren Metallmassen befinden. Dann ist das Pendel mit äußerster Sorgfalt zu behandeln, da es hier auf sehr große Präzision ankommt. Darüber ist das Notwendige in der p. 403, Anm. (G. u. W.) zitierten Arbeit gesagt.

Die Resultate finden sich in der Tab. 3 und auf der Fig. 2, p. 406 und 407. Auf der letzteren sind die Versuche *a* bis *e* fortgelassen worden, obschon sie zu den gleichen Ergebnissen führen, weil die  $\vartheta$  in zu großen Sprüngen variiert sind.

Man sieht, daß in den Bündeln I und II aus sehr dünnem Draht die Magnetisierung schon nach längstens  $\frac{12}{800000}$  Sek. — gleich  $\frac{1}{50000}$  Sek. — verschwunden ist. Bei Bündel III, aus etwas stärkerem Draht, ist sie einmal (Versuch *e*) bis nach  $\frac{1}{40000}$  Sek. nachweisbar, und bei Bündel IV aus dem dicksten Material noch nach  $\frac{1}{7500}$  Sek. Das beruht wahrscheinlich auf dem Einfluß der Wirbelströme.

Unter sonst gleichen Bedingungen schwindet die magnetische Induktion früher, wenn nur eine Hälfte der Spirale benutzt wird (vgl. *h* mit *o*, *q* mit *p*). Auch das ist leicht verständlich; denn unter diesen Umständen bietet die Spirale dem induzierten Strome, der seinerseits wieder auf den Magnetismus wirkt, ungünstigere Bedingungen wegen der geringeren Kapazität und Selbstinduktion.

So zeigt es sich auch, daß die *leere* Spirale schneller stromlos wird, wenn nur eine Hälfte durchströmt wird. Es kann dabei zu Eigenschwingungen kommen (Versuch *f*, *l* und *m*).

Um über die Güte der einzelnen Versuche ein Urteil zu ermöglichen, sind in Tab. 4 die nach der bekannten Formel

$$R = 0,67 \sqrt{\frac{\sum (\delta^2)}{2}}$$

berechneten wahrscheinlichsten Fehler der in Tab. 3 angegebenen Mittelwerte zusammengestellt, soweit sie die Größe von 3 Skt. überschreiten. Der Versuch  $r$  bleibt gegenüber dem Versuch  $s$ , der unter denselben Bedingungen angestellt ist, am besten unberücksichtigt.

Tabelle 4.

Wahrscheinlichste Fehler.

Versuch	$h$	$o$	$c$	$d$	$d$	$q$	$q$	$q$	$p$	$e$	$e$
$\vartheta =$	1	1	1	2	3	1	2	3	1	2	4
Fehler	7,7	3,1	4,4	50,2	45,9	36,3	27,9	9,5	8,4	22,3	5,8

Aus den Kurven lassen sich weitere Schlüsse ziehen bezüglich der Art, in welcher Weise die magnetische Induktion verschwindet, wenn man die Theorie zu Hilfe nimmt.

## V. Theorie mit Anwendung auf die Versuche.

Die Anwendung der Kirchhoffschen Sätze hat hier kein Bedenken, weil in der kürzesten in den Versuchen vorkommenden Zeit ( $\frac{1}{600000}$  Sek.) die Elektrizität in Drähten mehr als 500 m zurücklegt, während hier die Strombahn alles in allem höchstens 50—100 m lang ist.

Fig. 3 gibt nochmals eine Skizze der Versuchsanordnung, wobei jetzt die Kapazität der Spirale durch einen Kondensator (neben dem Buchstaben  $V$ ) repräsentiert ist.

Nun sollen folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

Der Widerstand der Spirale heiße  $W$ , der Zuleitungen zum Kondensator  $w$ , des Galvanometers  $v$ . Die Kapazität des Kondensators werde mit  $c$  bezeichnet, die Selbstpotentiale der leeren Spirale und des Galvanometers bezüglich mit  $p$  und  $q$ . Befindet sich Eisen in

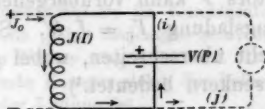


Fig. 3. Schema der Versuchsanordnung, wenn die Kapazität der Spirale durch einen Kondensator repräsentiert wird. Die eingeklammerten Bezeichnungen gelten für die Zeiten  $\vartheta$  bis  $\tau$ , die anderen für die Zeiten 0 bis  $\vartheta$ .



der Spirale, so wird die verschwindende Magnetisierung  $M$  in ihr eine elektromotorische Kraft induzieren, die in der Form  $r \cdot dM/dt$  dargestellt werden kann, wobei  $r$  eine Konstante ist.

Die Werte dieser Konstanten sind:  $p = 10^{-4}$  Henry,  $q = 3 \cdot 10^{-2}$  Henry.  $c$  konnte nicht ermittelt werden; eine Spirale von 10000 Windungen hatte  $1,5 \cdot 10^{-4}$  Mikrof., so daß man sicher zu hoch rechnet, wenn man die hier benutzte zu  $10^{-4}$  Mikrof. veranschlagt. Doch soll dieser ungünstigste Wert der späteren Rechnung zugrunde gelegt werden.  $W$  und  $w$  sind einzeln nicht bekannt, nur  $W + w = 1,2$  Ohm.  $W$  allein spielt in den späteren Formeln eine Rolle, sein Wert soll zu 1 Ohm angenommen werden;  $v = 400$  Ohm.

Am Schlusse dieser Seite kommt noch das Selbstpotential  $\rho$  von Spule + Eisenkern vor; dieses betrug etwa  $6 \cdot 10^{-2}$  Henry. Zur Vermeidung von Mißverständnissen soll noch hervorgehoben werden, daß dieses  $\rho$  nur bei einer Überschlagsrechnung benutzt wird; sonst wird die Selbstinduktion der Spirale in zwei Teile zerlegt, in die der leeren Spirale und die Rückwirkung des Eisens auf dieselbe.

Jeder Versuch besteht aus drei Phasen:

1. Durch die Spirale strömt der konstante Strom  $J_0$ , während die rechts punktierte Leitung (vgl. Fig. 3) noch davon getrennt ist. Der Kondensator hat die Ladung  $V_0$ , die gleich der Spannungsdifferenz  $J_0 W$  an beiden Enden der Spirale ist.

2. Nun wird der Elementkreis unterbrochen. In der Spirale herrscht der variable Strom  $J$ . Die Ladung des Kondensators  $V$  kann vorübergehend viel größer werden als die Anfangsladung  $V_0 = J_0 W$ . Sie kann aber den Wert  $J_0 \cdot \sqrt{\rho/c}$  nicht überschreiten, wobei  $\rho$  das Selbstpotential von Spirale + Eisenkern bedeutet.<sup>1)</sup>

1) Die umständliche Rechnung, die zu diesem Resultat führt, soll hier nicht ausgeführt werden. Eine kurze Andeutung wird genügen: Stellt man für den Kreis Spirale-Kondensator die Differentialgleichungen

$$J(W + w) = -\rho \frac{dJ}{dt} + V \quad \text{und} \quad J = -c \frac{dV}{dt}$$

auf, so bekommt man bekanntlich bei kleinem Widerstand für die Ladung die Gleichung

$$V = e^{-\alpha t} (A \sin \beta t + B \cos \beta t) = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \psi),$$

3. Nachdem der Kreis Spirale-Kondensator die Zeit  $\vartheta$  hindurch sich selbst überlassen war, wird nun der punktierte Kreis dazu gefügt. Die Stromintensitäten sollen jetzt heißen: In der Spirale  $I$ , in den Zuleitungen zum Kondensator  $i$ , im Galvanometer  $j$ ; die Ladung des Kondensators sei  $P$ . Die anderen Bezeichnungen bleiben bestehen. Jetzt gelten die Gleichungen

$$(1) \quad I = i + j,$$

$$(2) \quad -c \frac{dP}{dt} = i,$$

$$(3) \quad IW + jv = -p \frac{dI}{dt} - r \frac{dM}{dt} - q \frac{dj}{dt}.$$

Der Galvanometerkreis wird nach der Zeit  $\tau$  wieder geöffnet. Das Instrument zeigt eine Ablenkung  $z$ , die proportional ist der Elektrizitätsmenge  $\int_0^\tau j dt$ , also

$$(4) \quad z = k \int_0^\tau j dt.$$

worin

$$\alpha = \frac{W + w}{2q}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{q}c}, \quad A = -J_0 \sqrt{\frac{q}{c}}, \quad B = V_0 = J_0(W + w).$$

Wäre die Dämpfung nicht vorhanden, so wäre  $V_{\max.}$  gleich der Amplitude  $\sqrt{A^2 + B^2}$ , oder, da hier  $B$  gegen  $A$  zu vernachlässigen ist, gleich  $\pm A$ ; dieser Wert kann, weil er sicher (absolut genommen) zu groß ist, als oberer Grenzwert der Ladung betrachtet werden.

Einfacher und eleganter ergibt sich derselbe Wert aus energetischen Betrachtungen. Die zur Zeit des Ladungsmaximums im Kondensator vorhandene Energie kann nämlich höchstens gleich derjenigen sein, die bis zum Eintritt der Ruhe im Stromkreis in Wärme umgesetzt wird. Das gibt, da die in einem Kondensator steckende Energie gleich der halben Kapazität multipliziert mit dem Quadrat der Ladung ist

$$\frac{1}{2} c \cdot V_{\max.}^2 \leq \int_0^\infty J^2 (W + w) \cdot dt.$$

Unter Berücksichtigung der oben aufgestellten Differentialgleichungen folgt daraus

$$\frac{1}{2} c \cdot V_{\max.}^2 \leq -q \int J dJ - \int V dV,$$

und daraus schließlich der obige Grenzwert, da das zweite Glied rechts gegenüber dem ersten verschwindet.

Aus diesem Integral sollen Schlüsse über die Intensität der Magnetisierung  $M$  gezogen werden.

Aus Gleichung (3) folgt, wenn  $I$  nach Gleichung (1) und (2) durch  $-c(dP/dt) + j$  ersetzt wird

$$(5) \quad j = \frac{1}{W+v} \left( c W \frac{dP}{dt} - p \frac{dI}{dt} - r \frac{dM}{dt} - q \frac{dj}{dt} \right).$$

Setzt man diesen Wert in Gleichung (4) ein und führt die Integration aus, so erhält man

$$(6) \quad \left\{ z = \frac{k}{W+v} [c W (P_r - P_o) - p (I_r - I_o) - r (M_r - M_o) - q (j_r - j_o)] \right\}.$$

Nach der Zeit  $\tau$  ist aber die Kombination in Ruhe, und außerdem fängt der Strom im Galvanometer wegen der Selbstinduktion mit Null an, so daß  $P_r$ ,  $I_r$ ,  $M_r$ ,  $j_r$  und  $j_o$  verschwinden. Also hat man schließlich

$$(7) \quad z = \frac{k}{W+v} (-c W P_o + p I_o + r M_o).$$

Enthält die Spirale keinen Eisenkern, so ist  $r=0$ . Der Galvanometerausschlag heiße dann  $y$ , und statt  $P$  und  $I$  werde  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{I}$  geschrieben. Es gilt dann

$$(8) \quad y = \frac{k}{W+v} (-c W \mathfrak{P}_o + p \mathfrak{I}_o).$$

Hiermit ist bewiesen, daß in den Ordinaten der  $z$ -Kurven drei Anteile stecken (vgl. p. 402), in den  $y$ -Kurven zwei. Das erste Glied, in dem die Kondensatorladung vorkommt, ist aber so klein, daß es vernachlässigt werden kann.

Für die  $y$ -Kurven ist das sehr leicht zu beweisen. Der Maximalwert von  $\mathfrak{P}$  ist (da hier  $q=p$  ist) nach p. 410, Abschnitt 2  $J_0 \sqrt{p/c}$ ; also ist der Maximalwert des ersten Klammergliedes von Gleichung (8)  $J_0 \sqrt{p \cdot c} \cdot W$ , oder mit Berücksichtigung der Werte der Konstanten  $J_0 \cdot 10^3$  cm. Der Maximalwert des zweiten Klammergliedes tritt ein für  $\vartheta=0$  und ist (da  $\mathfrak{I}_0=J_0$ )  $J_0 \cdot p = J_0 \cdot 10^5$  cm. Dieses Glied ist also 1000mal größer als das erste. Für  $\vartheta=0$  ist  $y$  in den Versuchen 6–12 Skt. groß; also verursacht das erste Klammerglied einen Ausschlagszuwachs von nur  $1/100$  Skt.

Für die  $z$ -Kurven ist zu berücksichtigen, daß  $q$  (p. 410) den 60fachen Wert von  $p$  hat. Nach einigen leichten Rech-

nungen ergibt sich das Resultat, daß der Einfluß des Kondensatorgliedes hier höchstens  $\frac{1}{10}$  Skt. beträgt.

Man kann also schreiben

$$(9) \quad z = \frac{k}{W + v} (p I_0 + r M_0),$$

$$(10) \quad y = \frac{k}{W + v} \cdot p \mathfrak{I}_0.$$

Die  $y$ -Kurven (Versuche  $f, k, l, m, n$  der Fig. 2) geben mithin unmittelbar ein Bild des Stromabfalles in der leeren Spirale. Die aufgenommenen Punkte sind zu wenig zahlreich, um die zweifellos vorhandenen, sehr frequenten Schwingungen auch nur einigermaßen darzustellen. Jedoch läßt sich bestimmt behaupten, daß die Dämpfung viel größer ist, als die Rechnung ergibt, selbst wenn man den Widerstand zehnmal größer annimmt, als ihn die statische Messung ergibt. Diese Tatsache ist auch von anderen Beobachtern gefunden worden.<sup>1</sup>

Die  $z$ -Kurven sind nicht so einfach zu deuten, da es nicht gelingt, die beiden Summanden einzeln zu bestimmen. Nur für  $\vartheta = 0$  ist das möglich; für die übrigen Werte von  $\vartheta$  läßt sich für die noch vorhandene Magnetisierung nur ein oberer Grenzwert angeben.

Vergleicht man zwei Versuche mit gleicher magnetisierender Stromstärke  $J_0$ , so ist für  $\vartheta = 0$  sowohl in Gleichung (9)  $I_0$  als auch in Gleichung (10)  $\mathfrak{I}_0$  gleich  $J_0$  zu setzen. Zieht man dann (10) von (9) ab, so hat man

$$z_0 - y_0 = \frac{k}{W + v} \cdot r M_0.$$

Damit ist der Anfangsmagnetismus des Drahtbündels bestimmt. So entfallen z. B. bei Versuch  $h$ , Fig. 2, von den 45 Skt. der Maximalordinate nach Versuch  $m$  auf den  $I$ -Summanden 10, mithin 35 auf den anderen.

Nun wird sehr wahrscheinlich die Dämpfung, die schon in der leeren Spirale sehr erheblich war, durch den Eisenkern so stark vermehrt, daß der Strom immer positiv bleibt. Dann kann nach Gleichung (9) für jedes  $\vartheta$  der  $M$ -Summand höchstens die Größe der Ordinate  $z$  haben, also z. B. in dem eben angeführten Versuch  $h$  (vgl. Tab. 3) für  $\vartheta = \frac{2}{600000}$  Sek. höchstens

1) Vgl. z. B. Hj. Tallqvist, Ann. d. Phys. 60. p. 262. 1897.

12,5 Skt. betragen. Da dieses Glied für  $\vartheta = 0$  aber 35 Skt. groß war, so folgt aus diesem, und ebenso aus den anderen Versuchen, wenn man die Tab. 4 berücksichtigt, für die Bündel I und II aus Draht von 0,185 mm Dicke und die angegebenen schwachen magnetischen Felder:

*In  $\frac{1}{300000}$  Sek. ist die rasch verschwindende Magnetisierung auf weniger als die Hälfte ihres Anfangswertes gesunken.*

Wollte man nur die guten Versuche berücksichtigen, so ergäbe sich dafür nur  $\frac{2}{3}$  bis  $\frac{1}{2}$  dieser Zeit.

In derselben Weise läßt sich aus den Kurven ableiten:

*In  $\frac{1}{150000}$  Sek. sinkt der Magnetismus auf weniger als ein Zehntel, und nach  $\frac{1}{50000}$  Sek. ist er ganz verschwunden.*

*Von  $\frac{1}{50000}$  bis  $\frac{1}{3000}$  Sek. nach der Öffnung des magnetisierenden Stromes ändert sich die Magnetisierung nicht merklich.*

Ob später noch langsame Veränderungen eintraten, habe ich nicht weiter untersucht. Mit Rücksicht auf die Angaben von J. Klemenčič<sup>1)</sup>, nach denen längere Zeit aufbewahrte Drahtbündel ihre Eigenschaften ändern, will ich bemerken, daß die hier benutzten einige Tage bis Wochen nach dem Ausglühen untersucht sind.

Ich habe der beschriebenen Methode mit nur einer Spirale nach reiflicher Überlegung und nach langen Versuchen den Vorzug vor der üblichen gegeben, welche die Magnetisierung von der Induktionsspule trennt. Helmholtz erklärt beide für gleich gut. Nach meiner Meinung hat die zweite nur Nachteile: die verschwindende Magnetisierung induziert in beiden offenen Spulen störende Ströme, während nur die eine auf das Galvanometer wirkt, und außerdem ist die Theorie kompliziert und unübersichtlich, wenn die Wirkung beider Spulen aufeinander berücksichtigt wird.

Königsberg i. Pr., Physiol. Institut.

1) J. Klemenčič, l. c.

(Eingegangen 19. April 1907.)

**2. Über die absolute,  
von positiven Ionen ausgestrahlte Energie und  
die Entropie der Spektrallinien;  
von W. Wien.**

Bei der bisherigen thermodynamischen Theorie der Strahlung ist immer mit Recht der Unterschied zwischen Wärmestrahlung und der Strahlung betont, die durch andere Vorgänge als die Wärme hervorgerufen wird. Nun kann es ja keinem Zweifel unterliegen, daß Strahlung, die durch makroskopische Vorgänge, wie bei elektrischen Schwingungen, erregt wird, ihrem Wesen nach unterschieden werden muß von der Wärmestrahlung. Denn die elektrischen Schwingungen sind geordnete Vorgänge, denen keine Entropie von endlicher Größe zugeschrieben werden kann.

Dem gegenüber ist es eine offene Frage, ob Strahlung, die zwar nicht durch Wärme erregt, aber immerhin durch Vorgänge molekularer oder atomistischer Natur hervorgerufen wird, ihrer Natur nach unterschieden werden muß von der Wärmestrahlung. Nach den Erörterungen, die ich früher angestellt habe<sup>1)</sup>, ist die Temperatur und damit auch die Entropie eines Strahlenbündels durch die Intensität und die Farbe vollständig bestimmt, wenn die Strahlung von der Wärme erregt wird. Es fragt sich nun, ob ein Strahlenbündel von gleicher Intensität und Farbe, wenn es nicht von heißen Körpern, sondern etwa von einer Geisslerschen Röhre ausgeht, als in jeder Beziehung identisch mit jenem angesehen werden kann oder nicht. Mit anderen Worten, ob man ihm dieselbe Entropie zuzuschreiben hat wie dem anderen.

Da diese Frage vorläufig nicht exakt beantwortet werden kann, so scheint es mir ein rationeller Weg zu sein, zunächst die hypothetische Annahme zu machen, daß die Strahlung, wenn sie überhaupt von molekularen Vorgängen erregt wird,

1) W. Wien, Wied. Ann. 52. p. 132. 1894.

in ihrer Entropie durch Intensität und Farbe vollständig bestimmt ist, und zwar so, wie es bei der Wärmestrahlung jetzt wohl ziemlich allgemein angenommen ist.

Man kann jedenfalls versuchen, aus dieser Annahme Folgerungen zu ziehen und dann sehen, ob sie sich als durchführbar erweist oder nicht.

Nach unserer Hypothese würden wir also der Strahlung, wie sie etwa von einer Geisslerschen Röhre erregt wird, ihrer Intensität entsprechend eine im allgemeinen nicht übermäßig hohe Temperatur zuzuschreiben haben. Es muß aber von der Entropie, die auf diese Weise bestimmt wird, sehr wohl die Entropie des Strahlungsvorganges selbst unterschieden werden. Denn wie wir bei der Strahlung, die von einem nicht schwarzen Körper ausgeht, zwischen der Temperatur der Strahlung und der höheren des Körpers unterscheiden müssen, so wird dem Strahlungsvorgang in der Geisslerschen Röhre eine weit höhere Temperatur zukommen, da die leuchtenden Gase außerordentlich weit entfernt sind, ein schwarzer Körper zu sein.

Allerdings müssen wir, wie sich jetzt zeigt, die Annahme machen, daß die leuchtenden Atome auch ein Absorptionsvermögen haben, weil sich sonst kein Gleichgewicht der Strahlung herstellen könnte. Sollen die Sätze der thermodynamischen Strahlungstheorie überhaupt anwendbar sein, so muß eine leuchtende Gasmasse, wenn sie genügend große Ausdehnung hat, in ihrem Innern eine bestimmte Dichte der strahlenden Energie herstellen, die bei weiterer Ausdehnung der Gasmasse nicht mehr vergrößert wird, die also einem Grenzwert zustrebt.

Allerdings können wir, wenn wir von einem solchen Gleichgewicht der Strahlung sprechen wollen, nicht eine Geisslersche Röhre selbst oder einen Vorgang wählen, in den dauernd Energie hineingebracht wird. Denn Gleichgewicht der Strahlung kann nur in einem Gleichgewichtszustand der Energie selbst bestehen und es muß deshalb die leuchtende Gasmasse von den Räumen getrennt sein, in denen durch Energiezufuhr der Zustand des Leuchtens hervorgebracht wird.

In der Tat können wir dieser Bedingung dadurch genügen, daß wir die leuchtenden Gasionen betrachten, wie sie in den Kanalstrahlen aus dem eigentlichen Entladungsraum der Geisslerschen Röhre in einem von aller Energiezufuhr



freien Raum hineinfliegen. Wenn wir diese leuchtenden Gas-  
ionen von einem schwarzen Körper umschließen, der die Tem-  
peratur hat, wie sie der Strahlungsentropie der leuchtenden  
Ionen entspricht, so ist eben unsere Hypothese die, daß die  
Ionen sich ins Strahlungsgleichgewicht setzen und ebensoviel  
Energie absorbieren, wie emittieren, wobei noch außerdem  
vorausgesetzt wird, daß die Emission nicht durch die auf-  
fallende Strahlung beeinflußt wird. Jedem Lichtstrahl, der  
von einem Punkt des schwarzen Körpers ausgeht und in die  
leuchtende Gasmasse eindringt, muß dann ein Strahl gleicher  
Intensität entgegenkommen, der von der Gasmasse ausgesandt  
wird. Ist  $E$ , die Intensität des vom schwarzen Körper aus-  
gehenden Lichtstrahles,  $E dx$  die von einem unendlich kurzen  
Stück, das in der Richtung des Strahles in der Gasmasse aus-  
geschnitten wird, ausgesandte Intensität, so ist hiernach

$$(1) \quad \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{-\beta x} E dx = E_*, \\ \frac{E}{\beta} = E_*. \end{cases}$$

Diese Betrachtungen können aber wohl nur dann eine  
wirkliche Bedeutung erlangen, wenn wir irgend eine Möglich-  
keit besitzen, die Temperatur, die diesem Gleichgewichtszustand  
zukommt, wirklich zu messen.

Auf die eben betrachtete, im Strahlungsgleichgewicht be-  
findliche leuchtende Gasmasse können wir die Plancksche  
Theorie<sup>1)</sup> der Strahlungsentropie anwenden. Dieser Theorie  
ist bekanntlich die Existenz von Elementarquanten der Energie  
eigentümlich, welche sich nun in regelloser Weise auf die ein-  
zelnen Strahlungszentren verteilen, und die Entropie ergibt sich  
durch die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Es ergibt sich hierbei die Gleichung

$$(2) \quad \frac{U}{\varepsilon} = \frac{1}{e^{nT} - 1},$$

wo  $U$  die mittlere Energie jedes Strahlungszentrums ist,  $\varepsilon = h n$   
das Energieelement,  $n$  die Schwingungszahl,  $h$ ,  $\kappa$  Konstanten,

1) M. Planck, Ann. d. Phys. 4. p. 553. 1901.

$T$  die absolute Temperatur sind. Da aus den Strahlungsgesetzen  $h$  und  $\kappa$  bekannt sind, so ist bei gegebener Schwingungszahl die Temperatur  $T$  bekannt, sobald man die mittlere Schwingungsenergie der Ionen kennt.

Diese mittlere Energie der Ionen kann man bestimmen, wenn man durch Beobachtung die von einer bekannten Zahl Ionen ausgestrahlte Energie in der Zeiteinheit und die Dämpfungskonstante der Schwingungen kennt.

Nennen wir  $\sigma$  die in der Zeiteinheit von jedem Ion im Mittel ausgestrahlte Energie,  $2\alpha$  die Dämpfungskonstante, so ist

$$(3) \quad U = \int_0^{\infty} \sigma e^{-2\alpha t} dt = \frac{\sigma}{2\alpha}.$$

Die Bestimmung von  $\sigma$  ist nun bei den Ionen, die wir oben im Strahlungsgleichgewicht betrachtet haben, möglich, wenn wir photometrisch im absoluten Maß die pro Volumeinheit von einem Kanalstrahlbündel ausgestrahlte Energie messen und durch die Anzahl der im stationären Strom in der Volumeinheit vorhandenen leuchtenden Ionen dividieren. Die letztere ergibt sich aus der durch den Kanalstrahlenstrom transportierten Elektrizitätsmenge, die Geschwindigkeit der Kanalstrahlen und aus der Größe des elektrischen Elementarquantums unter der Voraussetzung, daß jedes positive Ion ein Elementarquantum der Elektrizität abgegeben hat. (Vgl. indessen noch die p. 435 besprochenen Hypothesen, wonach die Anzahl zu klein oder zu groß ausfallen würde.)

Die Möglichkeit, das von den bewegten Ionen ausgesandte Licht von dem zu trennen, das noch von ruhenden ausgesandt wird, ergibt sich durch die Entdeckung von J. Stark<sup>1)</sup>, der gezeigt hat, daß die bewegten Ionen eine nach dem Dopplerschen Prinzip verschobene Spektrallinie aussenden.

Man muß also die Energie, die in dieser verschobenen Spektrallinie steckt, photometrisch messen.

Daß es endlich die positiv geladenen Ionen sind, welche die verschobene Linie aussenden, ergibt sich aus einer Beobachtung von Rau<sup>2)</sup>, wonach diese Linie im Magnetfelde, das die positiv geladenen Ionen ablenkt, fast verschwindet.

1) J. Stark, Physik. Zeitschr. p. 892. 1905.

2) P. Rau, Physik. Zeitschr. p. 421. 1906.

Die Messungen sind bisher ausschließlich an der Linie  $H_{\beta}$  des Wasserstoffs gemacht, und zwar deshalb, weil nur diese Linie bei einem begrenzten Kanalstrahlbündel, das nicht in der Achse anvisiert werden kann, bei der großen erforderlichen Dispersion genügende Intensität für photometrische Messungen besitzt.

### § 1. Die Strahlungsmessung.

Die photometrische Methode war eine subjektive, und zwar wurde die Helligkeit der verschobenen Spektrallinie mit der verglichen, die von einem schwarzen Körper von bekannter Temperatur ausgestrahlt wurde. Da die optischen Systeme des Spektralapparates immerhin ziemlich kompliziert waren, so wurde streng darauf geachtet, daß die beiden zu vergleichenden Strahlenbündel genau denselben optischen Weg zurücklegen und daher genau den gleichen schwächenden Einflüssen unterworfen sind. Die Vergleichung geschah dann in folgender Weise: An Stelle des Fadenkreuzes wurde ein dünner Platindraht befestigt, der schräg von hinten durch eine Öffnung in der Wand des Okulars beleuchtet werden kann. Um nicht durch Verschiedenheit der Farbe gestört zu werden, wurde das Fadenkreuz durch spektral zerlegtes Licht einer Glühlampe, indem aus dem Spektrum ein Stück in der Gegend von  $H_{\beta}$  ausgeschnitten wurde, beleuchtet. Die Intensität der Glühlampe war durch Vorschaltwiderstände veränderlich gemacht. Der Beobachter sah zunächst den dunklen Platindraht auf dem hellen Grunde der breiten Spektrallinie. Nun wurde der Platindraht beleuchtet und die Intensität der Glühlampe so reguliert, daß der Draht die Helligkeit der Spektrallinie erhielt. Dann wurde die Entladung abgestellt und die Strahlung des schwarzen Körpers in derselben Richtung auf den Spalt des Spektralapparates geworfen. Dann erschien der unbeleuchtete Draht dunkel auf dem hellen Grunde des kontinuierlichen Spektrums. Wurde er nun mit derselben Lichtintensität beleuchtet wie vorher, so konnte die Temperatur des schwarzen Körpers so reguliert werden, daß gleiche Helligkeit eintrat.

Die allgemeine Versuchsanordnung war folgende. Die Kanalstrahlröhre (Fig. 1) war horizontal und so gelegt, daß sie mit der Kollimatorachse des Spektrometers einen Winkel

von  $36^{\circ} 40'$  bildete. Die Kathode bestand aus einem massiven Aluminiumzylinder von 3 cm Länge, der eine Durchbohrung von 4 mm hatte. Es war auf diese Weise ausgeschlossen, daß Licht aus dem Entladungsraum in das Spektrometer gelangte und ebensowenig konnte die Entladung selbst in den Beobachtungsraum hinübergreifen. Der strahlende schwarze Körper bestand aus einem elektrischen Ofen mit 4 cm weiter Porzellanröhre, in die eine Röhre aus Eisenblech geschoben war, die

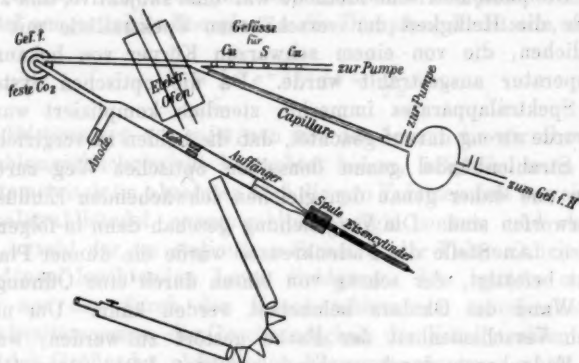


Fig. 1.

10 cm lang war. Die Eisenröhre war einseitig geschlossen und wurde auf eine gleichmäßige Temperatur gebracht. Die Temperatur wurde mit einem Le Chatelierschen Thermo-  
element gemessen. Die Röhre lag genau in der Verlängerung des Kollimators des Spektrometers, zwischen beiden die Entladungsröhre. Die vom schwarzen Körper ausgehenden Strahlen haben demnach einmal die Wand der Glasröhre zu durchsetzen und gehen dann durch dieselben Medien wie die von den Kanalstrahlen ausgehende Strahlung. Beide Strahlungen gehen durch ein vor der Röhre angebrachtes Diaphragma, durch die das Strahlenbündel begrenzt wird.

Bei der Justierung war vor allem darauf zu achten, daß das Objektiv des Kollimators vollständig durch die durch das Diaphragma gegangenen Strahlen des schwarzen Körpers sowohl wie der Kanalstrahlen ausgefüllt wurde. Im übrigen beein-

flußten dann die Teile des Spektrometers beide Strahlungen in gleicher Weise.

Bei der photometrischen Anordnung wird ein Element des Kanalstrahlbündels von der Länge  $ds$  und dem Querschnitt  $r^2\pi$  ersetzt durch das Flächenelement eines schwarzen Körpers  $2rds\sin\alpha$ , das gleichviel strahlt. Betrachten wir ein Element des Spaltes  $ds$ , und ist  $Ed\lambda$  die Strahlung des schwarzen Körpers,  $N$  die Anzahl der stationär in einem Kubikzentimeter des Kanalstrahlbündels enthaltenen Ionen,  $\sigma$  die Ausstrahlung eines Ions in der Sekunde, so ist<sup>1)</sup>

$$2rEd\lambda ds_1 \sin\alpha = \frac{\sigma N ds ds_1 r^2\pi}{4\pi},$$

woraus

$$N\sigma = \frac{8\pi Ed\lambda r \sin\alpha}{r^2\pi}$$

folgt.

Ist  $e$  die Ladung des Elementarquantums,  $i$  die von den Kanalstrahlen in der Sekunde transportierte Elektrizitätsmenge, so ist  $i/e$  die Anzahl der in der Sekunde durch den Querschnitt gehenden positiv geladenen Ionen.

Ist  $v$  die Geschwindigkeit der Kanalstrahlen, so ist die Anzahl der Ionen pro Zentimeter des Bündels  $i/ev$ , also die Anzahl in der Volumeinheit  $i/evr^2\pi$ .

Daher ist

$$(4) \quad \sigma = \frac{8\pi r Ed\lambda \sin\alpha v e}{i}$$

Für jeden Zentimeter braucht das Ion die Zeit  $1/v$ . Daher ist

$$s = \frac{\sigma}{v} = \frac{4\pi Ed\lambda r \sin\alpha e}{i}$$

die Ausstrahlung jedes Ions auf der Weglänge eines Zentimeters.

Für die Bestimmung von  $Ed\lambda$  kann man die theoretischen Strahlungsformeln des schwarzen Körpers benutzen: da es sich um einen schmalen Spektralbereich handelt, so muß die Breite  $d\lambda$

1) Es ist natürlich angenommen, daß die Strahlung nach allen Richtungen in gleicher Stärke ausgesandt wird.

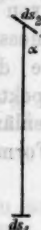


Fig. 2.

der nach dem Dopplerschen Prinzip verschobenen Linie gemessen werden.

In der Messung der Breite der Linie und der Berücksichtigung der Intensitätsverteilung lag eine erhebliche Schwierigkeit. Um eine möglichst große Dispersion zu erhalten, wurde ein Kirchhoffscher Spektralapparat mit vier Prismen benutzt. Die von der letzten Prismenfläche reflektierte Skala wurde zur Messung der Breite der Spektrallinie benutzt. Zunächst wurde die Dispersion im Minimum der Ablenkung durch 11 Spektrallinien von bekannter Wellenlänge bestimmt. Die Wellenlänge  $\lambda$  ließ sich in  $\mu\mu$  mit großer Genauigkeit durch die Formel

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{a}{s_0 - s}$$

ausdrücken, wo  $a = 119000$ ,  $s_0 = 549$ ,  $s$  die Skalenteile der reflektierten Skala bedeuten. Hieraus folgt

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{a}{(s_0 - s)^2}$$

Für  $H_\beta$  ist  $s = 25$ , so daß hier

$$d\lambda = 0,433 \, ds \text{ ist.}$$

Die Breite  $ds$ , ausgedrückt in Skalenteilen, wurde nun sowohl durch subjektive Beobachtung, wie durch photographische Aufnahmen bestimmt. Für letztere wurde an Stelle des Okulars eine kleine Kamera geschraubt, in welche eine kleine photographische Glasplatte geschoben werden konnte. Eine Okularlinse, die in die Kamera geschoben wurde, wurde auf die Glasplatte scharf eingestellt und darauf nach der Entfernung der Glasplatte scharf auf das reelle Bild des Objektivs eingestellt. Dann war man sicher, daß auf der photographischen Platte ein scharfes Bild entstehen mußte.

Bekanntlich ist die verschobene Spektrallinie nach der Seite der unverschobenen scharf begrenzt, an der anderen Seite dagegen verwaschen. An dieser Seite wurde von einer bestimmten Stelle ein gleichmäßiger Abfall der Intensität bis auf Null angenommen und hiernach die Grenze bestimmt, wie sie einem plötzlichen Aufhören entsprechen würde. Die Breite der Linien variiert mit der Spannung aber keineswegs pro-

portional der Geschwindigkeit, vielmehr ließ sich die empirische Formel aufstellen

$$ds = 1 + 0,01 \sqrt{V},$$

wo  $V$  die Entladungsspannung in Volt,  $ds$  in Skalenteilen gemessen ist.

Nun ist bekanntlich für die kürzeren Wellenlängen gültig die Formel

$$(5) \quad Ed\lambda = \frac{2c^3 h}{\lambda^5} e^{-\frac{ch}{\lambda T}} d\lambda.$$

$$c = 3 \cdot 10^{10}, \quad h = 6,55 \cdot 10^{-27}, \quad k = 1,346 \cdot 10^{-16},$$

$$\lambda = 486,1 \cdot 10^{-7},$$

woraus  $Ed\lambda$  zu berechnen ist.

Als Korrektur ist noch die doppelte Reflexion an der einen Glaswand anzubringen. Sie wird nach den Fresnelschen Formeln berechnet und ergibt sich zu 18 Proz.

Alle Beobachtungen wurden bisher nur an der Linie  $H_\beta$  des Wasserstoffs gemacht, weil diese Linie bei der starken Dispersion allein hell genug war, um photometrische Messungen zu gestatten.

## § 2. Die elektrischen Messungen.

Zur Erzeugung einer konstanten Entladung in einer reinen Gasfüllung wurde eine Methode gebraucht, die sich sehr bewährt hat und für Messungen in reinen Gasen empfohlen werden kann. Bekanntlich findet in Entladungsröhren ein beständiger Austausch der Gasfüllung mit den in den Elektroden okkludierten Gasen statt, so daß es einer häufigen Erneuerung der Gasfüllung bedarf, wenn man reine Gase haben will. Um dies nun in möglichst zuverlässiger Weise zu erhalten, wurde ein beständiger Gasstrom in die Entladungsröhre eingeleitet und durch eine Gaedesche Pumpe wieder herausgepumpt. Da die Pumpe sehr rasch und sehr konstant pumpt, so war es möglich, einen stationären Gasstrom einzuleiten und doch das Vakuum auf einer beträchtlichen Höhe zu halten. Der Gasstrom wurde durch eine Kapillare eingeleitet, die ungefähr 1,4 m lang und 0,1 mm im Durchmesser hatte. Sie führte zu einem großen Glasgefäß, das mit Hilfe der Gerykpumpe leergepumpt und dann mit reinem, trockenem Wasserstoff ge-



füllt wurde. Die Menge des durch die Kapillare einfließenden Wasserstoffs wurde durch den Druck in dem Glasgefäß reguliert. Wenn die Gaedesche Pumpe in Tätigkeit trat, so stellte sich ein stationäres Vakuum her, das von dem Druck, der im Vorgefäß herrschte, abhängig war. Es war auf diese Weise leicht, das Vakuum nach Belieben zu regulieren.

Es ist natürlich, daß die Reinheit der Gasfüllung auf diese Weise eine sehr große war. In der Tat zeigten auch lichtstarke Spektroskope keine Spur anderer als der Wasserstofflinien, mit Ausnahme der grünen Quecksilberlinie. Diese wurde auch durch Vorschalten von Schwefel nicht vollständig beseitigt. Sie verschwand erst, als ein Gefäß eingeschaltet wurde, das durch feste Kohlensäure auf  $-80^{\circ}$  abgekühlt war.

Zur Bestimmung der an den Kanalstrahlen transportierten Elektrizitätsmenge war ein Auffänger in der Röhre hinter der Kathode verschiebbar. Er bestand aus einer Messingröhre von 10 cm Länge, die an einem Ende verschlossen war, am anderen einen Deckel trug, in dem eine Öffnung von 6 mm Durchmesser gebohrt war. An das verschlossene Ende der Röhre war ein Messingdraht befestigt, der wieder mit einem Eisenzylinder verbunden war. Der Eisenzylinder verschob sich in einer Röhre von 12 mm l. W. Wurde um diese Röhre eine Spule gelegt, die von einem Strom durchflossen wurde, so wurde der Eisenzylinder in diese Spule hineingezogen und folgte auf diese Weise jeder Bewegung der Spule. Zur Messung des Kanalstrahlstromes wurde der Auffänger ganz nahe an die Kathode herangeschoben. Das ganze Kanalstrahlbündel fiel dann in die Öffnung des Auffängers und bei den großen Dimensionen des Auffängers konnten Sekundärstrahlen nicht in nennenswertem Betrage nach außen gelangen. Die Vorrichtung diente gleichzeitig dazu, die Abnahme des Kanalstromes mit der Entfernung von der Kathode zu messen. Der Strom selbst wurde durch ein Spulengalvanometer von Siemens & Halske gemessen, das durch Nebenschlüsse auf eine passende Empfindlichkeit gebracht war.

Der durch die Entladungsröhre gehende Strom wurde bei Spannungen über 4000 Volt von einer 20 plattigen Influenzmaschine, bei niedrigeren von einer Hochspannungsdynamo geliefert. Die niedrigeren Spannungen wurden durch ein elektro-

statisches Voltmeter von Siemens & Halske, die höheren durch Funkenlängen zwischen blanken Messingkugeln von 6 cm Durchmesser gemessen.

Jede Beobachtung geschah nun in der Weise, daß zunächst die Helligkeit des beleuchteten Platindrahtes im Okular gleich der Helligkeit der verbreiterten Spektrallinie gemacht wurde. Dann wurde die Entladung abgestellt und die Helligkeit der Strahlung des schwarzen Körpers gleich der des Platindrahtes gemacht. Dann wurde die Temperatur am Siemensschen Spulengalvanometer, das mit dem Thermoelement verbunden war, abgelesen. War diese Beobachtung gemacht, so wurde der Auffänger für die Kanalstrahlen bis ganz nahe an die Kathode geschoben und dann am Siemensschen Spulengalvanometer mit Spiegelablesung die Stromstärke des Kanalstrahlenstromes abgelesen, schließlich die Spannung. Da die Entladung sehr konstant blieb, war vollauf Zeit, die einzelnen Beobachtungen sorgfältig durchzuführen.

In der Tabelle sind die Ergebnisse der Beobachtungen zusammengestellt. Die erste Vertikalreihe enthält die beobachteten Entladungsspannungen, die zweite die hieraus berechneten Geschwindigkeiten des Wasserstoffatoms, die dritte die absolute Temperatur des schwarzen Körpers, die vierte den Kanalstrahlenstrom, die fünfte den Wert von  $\sigma$ , berechnet aus Formeln (4) und (5) mit folgenden Zahlenwerten:

$$r = 0,35 \text{ cm}, \quad e = 4,69 \cdot 10^{-10} \text{ elektrost. Einh.}$$

Die sechste endlich enthält den Druck des Gases bei der beobachteten Spannung in mm Hg.

In der Kolumne der Tabelle, die mit  $\sigma_1$  überschrieben ist, sind die Werte von  $\sigma$  angegeben, die man erhält, wenn man anstatt der aus der Entladungsspannung berechneten Geschwindigkeit der Kanalstrahlen den Mittelwert der Geschwindigkeit setzt, den man erhält, wenn man die verschiedenen Geschwindigkeiten berücksichtigt, deren Vorhandensein durch die Breite der verschobenen Spektrallinie bewiesen wird. Da die äußerste Grenze dieser sehr nahe der aus der Elektroden-spannung berechneten entspricht, so entspricht der Mittelwert der Verschiebung der Spektrallinie, die wir erhalten, wenn

wir von der berechneten die halbe Breite  $\delta\lambda/2$  der verschobenen Spektrallinie abziehen, d. h.

$$\lambda_0 - \lambda - \frac{\delta\lambda}{2}, \quad \text{wo} \quad \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c}$$

das Verhältnis der berechneten Geschwindigkeit zur Lichtgeschwindigkeit ist. Es ist also, wenn  $v_1$  die mittlere Geschwindigkeit bezeichnet,

$$\frac{v_1}{c} = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0} - \frac{\delta\lambda}{2\lambda_0} = \frac{v}{c} - \frac{\delta\lambda}{2\lambda_0},$$

woraus

$$\frac{v_1}{v} = 1 - \frac{c\delta\lambda}{2v\lambda_0} \text{ folgt.}$$

Berücksichtigen wir noch, daß wir  $\delta\lambda$  nicht durch Beobachtung in der Geschwindigkeitsrichtung, sondern in einer um den Winkel  $\alpha$  geneigten erhalten haben, so ergibt sich

$$\frac{v_1}{v} = 1 - \frac{c\delta\lambda}{2\lambda_0 v \cos \alpha}.$$

Spannung in Volt	Geschwin- digkeit cm sec $10^{-7}$	Absolute Tem- peratur $T$	Strom $\times 10^5$ in C.G.S.	$\sigma \cdot 10^7$	$\sigma_1 \cdot 10^7$	$s$ in mm Hg
1890	6,15	1298	0,28	3,77	2,3	0,401
1990	6,16	1342	0,52	4,86	3,0	0,40
2250	6,71	1355	0,64	5,41	3,4	0,31
2300	6,78	1363	0,78	5,08	3,2	0,30
2550	7,14	1362	0,72	5,92	3,8	0,23
2650	7,28	1333	0,64	4,17	2,7	0,200
5820	10,79	1414	3,52	4,9	3,8	0,081
10800	14,70	1362	2,09	5,7	4,4	0,061
12600	15,87	1352	2,60	4,5	3,5	0,058
13500	16,43	1333	2,72	7,4	5,8	0,050
18600	19,29	1384	2,37	10,5	8,3	0,039
32700	25,6	1333	2,58	6,9	5,6	0,016

### § 3. Die Dämpfung der Schwingungsenergie der Ionen durch Strahlung und der Absorptionsindex.

Die Größe  $\sigma$  hat sich im wesentlichen direkt durch die Beobachtung ergeben. Um aber die Größe  $U$ , die Energie

der Schwingungszentren zu bestimmen, müssen wir noch die Dämpfung kennen.

Unter der Voraussetzung, daß die Ionen durch schwingende negative Elektronen leuchten, wie es nach dem Zeemanschen Phänomen wahrscheinlich ist, hat Wiechert eine wichtige Berechnung der Dämpfungskonstante gegeben.<sup>1)</sup> Er findet

$$(6) \quad \frac{1}{2\alpha} = \frac{3}{8\pi^2} \frac{mc}{e} \frac{1}{e},$$

wo für

$$\frac{e}{m} = 1,87 \cdot 10^7, \quad e = 4,69 \cdot 10^{-10}$$

einzusetzen ist, entsprechend dem negativen Elektron. Hieraus ergibt sich

$$2\alpha = 9,77 \cdot 10^7.$$

Wenn man diesen Wert auf die Dämpfung unserer Ionen anwendet, so kommt man auf eine erhebliche Schwierigkeit. Er ist nämlich mit den Beobachtungen nicht vereinbar, wenn man von der Annahme ausgeht, daß das Leuchten der Kanalstrahlen vor der Kathode erregt wird und dann hinter der Kathode keine Anregung mehr erfolgt. Für eine Geschwindigkeit  $6,15 \cdot 10^7$  wäre nämlich der Dämpfungsindex für den Zentimeter

$$\frac{2\alpha}{v} = \frac{9,77}{6,15}$$

viel zu groß, um mit der Beobachtung vereinbar zu sein. Tatsächlich bemerkt man auch bei diesen geringen Geschwindigkeiten auf Strecken von über 10 cm noch erhebliches Leuchten der Kanalstrahlen.

Obwohl nun der Wiechertsche Wert auf der Voraussetzung beruht, daß die Emission durch schwingende Bewegung eines Elektrons hervorgerufen wird, was bei unserer Unkenntnis über den Mechanismus des Leuchtens zweifelhaft erscheinen mag, so spricht doch ein weiterer Umstand gegen die Voraussetzung, daß der Leuchtprozeß ausschließlich vor der Kathode erregt wird. Wenn dies nämlich der Fall wäre, so dürfte hinter der Kathode kein Leuchten mehr hervor-

1) E. Wiechert, Jubelband für H. A. Lorentz 1900. p. 571.

gerufen werden und alles dort auftretende Licht würde von den zum Leuchten gebrachten und hinter die Kathode fliegenden Ionen ausgesandt werden.

Nun zeigt aber dies Spektrum hinter der Kathode nicht nur die verschobene Spektrallinie, sondern auch eine von ruhenden Ionen ausgesandte Linie. Beide sind durch einen dunkeln Zwischenraum getrennt. Es ist also nicht möglich, daß die Ionen zum Teil allmählich zur Ruhe kommen und schließlich eine „ruhende“ Linie aussenden, denn dann müßte der dunkle Zwischenraum fehlen. Man kann doch nicht wohl annehmen, daß die allmählich langsamer fliegenden Teilchen bei einer bestimmten Geschwindigkeit zu leuchten aufhören und im Ruhezustande wieder zu leuchten beginnen.

Die Existenz der ruhenden Linie hinter der Kathode scheint mir vielmehr zu beweisen, daß wir auch hier noch Erregung des Leuchtens anzunehmen haben. Diese Überlegung macht es aber auch unmöglich, die Dämpfung experimentell aus der Lichtabnahme mit wachsender Entfernung von der Kathode zu bestimmen, wie es sonst wohl möglich wäre.

Legen wir für die Dämpfung den Wiechertschen Wert zugrunde, so können wir unter der Voraussetzung, die wohl ziemlich sicher zutreffen wird, daß die strahlenden Ionen ihre Schwingungsenergie vollständig in Form von Strahlung aussenden können, den Wert der Energie  $U$  selbst berechnen. Es ist dann

$$U = \int_0^{\infty} \sigma e^{-2at} dt = \frac{\sigma}{2a}.$$

Ferner kann man auch den Absorptionsindex eines mit strahlenden Ionen erfüllten Raumes ohne Zuhilfenahme weiterer Hypothesen bestimmen. Bei den Versuchen mit Kanalstrahlen ist die Anzahl der leuchtenden Ionen so außerordentlich klein, daß eine gegenseitige Beeinflussung ausgeschlossen ist. Unter der Voraussetzung bekannter Dämpfung erhält man dann den Wert des Absorptionsindex.

Nennen wir  $2\pi dn$  die Intensität,  $n$  die Schwingungszahl einer in der Richtung der Polarkoordinaten  $\vartheta, \varphi$ , auf einen linear schwingenden Oszillator auffallenden unpolarisierten, monochromatischen Strahlung,  $dn$  die Spektralbreite der von

ihm emittierten und absorbierten Strahlung, so wird<sup>1)</sup> von dem Oszillator die Energie

$$dt \cdot \frac{3c^2\alpha}{4\pi n^3} R \sin^2 \vartheta d\vartheta d\varphi$$

absorbiert. Kommen von allen Richtungen gleiche Intensitäten, so haben wir in bezug auf  $\vartheta$  von 0 bis  $\pi$ , in bezug auf  $\varphi$  von 0 bis  $2\pi$  zu integrieren, und erhalten

$$dt \cdot \frac{2\alpha c^2}{n^3} R.$$

Betrachten wir nun ein Volumelement  $dx dy dz$  und nennen  $N$  die Anzahl Oszillatoren in der Volumeinheit. Es gehen dann in allen Richtungen Strahlen gleicher Intensität und in der Richtung  $dx$  die Energie

$$2R dn dt dy dz$$

in das Volumelement. Auf der anderen Seite tritt heraus die Energie

$$2R dn dt dy dz + 2 \frac{\partial R}{\partial x} dx dn dt dy dz.$$

Der Unterschied ist die absorbierte Energie. Also

$$dt \cdot N dx dy dz \frac{2\alpha c^2}{n^3} R = -2 \frac{\partial R}{\partial x} dx dy dz dn dt.$$

Nun ist in einem absorbierenden Medium

$$R = R_0 e^{-\beta x},$$

$$\beta = \frac{\partial R}{\partial x} / R,$$

also

$$(7) \quad = \frac{2\alpha c^2 N}{2n^3 dn}.$$

Es ist hiernach der Absorptionsindex, wenn wir es nur mit einfachen Elektronenschwingungen zu tun haben, proportional der Anzahl  $N$  der Ionen in der Volumeinheit.

Die Gültigkeit dieser Beziehung (7) ruht im wesentlichen auf denselben Voraussetzungen wie die Berechnung der Dämpfung nach Wiechert. Für einen Strahl von gleicher

1) Vgl. M. Planck, Vorles. über die Theorie der Wärmestrahlung p. 206.

Beschaffenheit, wie der bei der Spannung von 32700 Volt beobachtete, wo die Anzahl der Ionen in der Volumeinheit  $N = 1,68 \cdot 10^7$  ist, ergibt sich in derselben Richtung, wie die Beobachtung erfolgte,

$$\beta = 1,25 \cdot 10^{-6}$$

für den Zentimeter. Die Beobachtung dieser Absorption dürfte der Beobachtung unzugänglich sein.

Bei der Formel (7) ist angenommen, wie es bei Spektrallinien ja annähernd der Fall ist, daß die Gesamtintensität

$$\int_0^{\infty} \mathfrak{K} dn = \mathfrak{K} dn$$

ist. Man ersieht, daß bei schmalen Linien der Absorptionsindex erheblich größer sein müßte.

In unserem Falle hatten wir es mit einer durch die verschiedene Geschwindigkeit der Ionen verbreiterte Linie zu tun. Die Zahl der Ionen, von denen man eine schmale Linie erhält, ist also verkleinert und daher kommt ein verhältnismäßig kleiner Wert des Absorptionsindex.

Im Natriummetall ist der Absorptionsindex für gelbes Natriumlicht nach Drude

$$\beta_{\text{Na}} = 3,37 \cdot 10^5.$$

In einem Kubikzentimeter Natrium sind  $N_{\text{Na}} = 2,6 \cdot 10^{22}$  Atome. In unserem Kanalstrahlbündel war die Zahl der bewegten leuchtenden Ionen

$$N = 1,68 \cdot 10^7,$$

daher ist

$$\frac{\beta \cdot N_{\text{Na}}}{\beta_{\text{Na}} \cdot N} = 5,75 \cdot 10^3,$$

d. h. die Absorption der einzelnen Kanalstrahlionen wäre  $5,76 \cdot 10^3$  mal so groß wie die der einzelnen Na-Atome im festen Metall. Doch bezieht sich, wie oben bemerkt, dieser Absorptionsindex auf die bewegten Ionen. Um den eigentlichen Wert des Absorptionsindex zu erhalten, müßte man für  $dn$  die natürliche Breite der Linie einsetzen. Die Absorption von Spektrallinien in Salzflammen kann möglicher-



weise gemessen werden und würde, falls man die Ionenzahl bestimmen könnte, zu einer Prüfung der obigen Formel dienen können.

#### § 4. Berechnungen und Hypothesen.

Es mag noch besonders hervorgehoben werden, daß der beobachtete Strahlungszustand mit der Geschwindigkeit der Kanalstrahlen nichts zu tun hat. Allerdings scheint die Erregung des Leuchtens durch die Geschwindigkeit bedingt zu sein. Das einmal erzeugte Leuchten kann aber nur in unmerklichem Grade von der Geschwindigkeit beeinflußt werden. Aus der Tabelle p. 426 geht auch hervor, daß die Größe  $\sigma$  nur in geringer Weise von der Geschwindigkeit abhängt, wenn diese Abhängigkeit nicht überhaupt sekundären Einflüssen zuzuschreiben ist.

Nach der vorgetragenen Anschauung verhält sich ein System leuchtender positiver Ionen wie ein Körper von hoher Temperatur und geringem Emissionsvermögen. Ein Kanalstrahlenbündel von unendlichem Querschnitt würde die Spektrallinie in der Intensität geben wie ein schwarzer Körper von der berechneten Temperatur. Sei die Energie der aus dem Oberflächenelement  $ds$  des unendlich dicken Bündels senkrecht heraustretenden Strahlen

$$E_\lambda d\lambda ds.$$

Zu diesen Strahlen hat jedes auf dem Wege der Strahlen liegende Volumelement  $ds \cdot dx$  einen Beitrag geliefert, nämlich  $N\sigma ds dx e^{-\beta x}$ , wo  $\beta$  wieder den Absorptionsindex bezeichnet. Daher ist

$$E_\lambda d\lambda ds = N\sigma ds \int_0^\infty dx e^{-\beta x} = \frac{N\sigma}{\beta} ds.$$

Also ist

$$\frac{N\sigma}{\beta} = E_\lambda d\lambda.$$

Nun ist die Emission des schwarzen Körpers senkrecht zum Oberflächenelement

$$E_\lambda d\lambda = d\lambda \frac{2\pi^5 h}{15} e^{-\frac{c}{\lambda T}},$$

wenigstens, wenn  $e^{\epsilon/\kappa T}$  groß gegen 1 ist. Die Temperatur  $T$  bestimmte sich aus der Gleichung

$$\frac{U}{\epsilon} = e^{-\frac{\epsilon}{\kappa T}},$$

so daß

$$E_s d\lambda = d\lambda \frac{2c^2 h U}{\lambda^5 \epsilon} = \frac{d\lambda 2c^2 h}{\lambda^5 \epsilon} \cdot \frac{\sigma}{2\alpha}.$$

Daher ist

$$\beta = \frac{N\sigma}{E_s d\lambda} = \frac{N\sigma \cdot 2\alpha \epsilon \lambda^5}{2c^2 h d\lambda \sigma},$$

oder, da

$$n = \frac{c}{\lambda}, \quad hn = \epsilon, \quad dn = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda$$

ist, wenn die positiven  $dn$  und  $d\lambda$  nach derselben Weise gerechnet werden,

$$\beta = \frac{N 2\alpha c^2}{2n^2 dn}$$

in Übereinstimmung mit Gleichung (7).

Wenn wir den Wert von  $\sigma$  für hohe Spannungen zugrunde legen, nämlich

$$\sigma = 5,64 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Erg}}{\text{sec}},$$

und ferner setzen

$$2\alpha = 9,78 \cdot 10^7 \text{ sec}^{-1}, \quad \epsilon = 4,04 \cdot 10^{-12} \text{ Erg}, \quad \kappa = 1,346 \frac{\text{Erg}}{\text{Grad}},$$

so berechnet sich aus  $\frac{\sigma}{2\alpha \epsilon} = e^{-\frac{\epsilon}{\kappa T}}$

$$T = 4584^\circ.$$

Berechnen wir die mittlere Geschwindigkeit, die dieser Temperatur entspricht, wenn wir ein vollkommenes Gas betrachten, dessen Atome die Masse eines Elektrons haben, so finden wir

$$u = 4,61 \cdot 10^7 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}.$$

Diese Geschwindigkeit erreichen die Elektronen durch eine Spannung von 0,64 Volt und sie entspricht der lebendigen Kraft eines Elektrons von

$$9,24 \cdot 10^{-13} \text{ Erg}.$$

Diese Energie ist von der Größenordnung des Elementarquantums der Energie

$$4 \cdot 10^{-13} \text{ Erg}$$

selbst.

Sollte die Übereinstimmung beider Werte etwa durch eine genauere Kenntnis des Dämpfungsverhältnisses und der Anzahl der Ionen eine bessere werden, so würde man annehmen haben, daß die mittlere lebendige Kraft der Elektronenbewegung auch hier die Temperatur bestimmt und daß die freien Elektronen bei dieser mittleren lebendigen Kraft sich mit den inneren gebundenen Elektronen des Atoms ins dynamische Gleichgewicht setzen können. Im vollen Gleichgewichtszustand würde dann ein beständiger Austausch zwischen freien und gebundenen Elektronen stattfinden. Beim Hineingehen eines Elektrons ins Atom würde seine Energie als ein Elementarquantum in Strahlung verwandelt werden und bei der Absorption eines Energieelementes würde ein Elektron wieder frei.

Für die Erregung des Leuchtens würde hiernach im wesentlichen die Existenz des notwendigen Betrages der mittleren lebendigen Kraft freier Elektronen notwendig sein.

Es kommt nach dieser Auffassung für die Erregung des Leuchtens nicht auf die Anzahl der Zusammenstöße und auf die Geschwindigkeit der Ionen an, sondern nur darauf, daß Elektronen von genügender mittlerer lebendiger Kraft sich mit den Ionen in demselben Raum befinden. Es erscheint nicht ausgeschlossen, daß die durch Kathoden- und Kanalstrahlen erzeugten sekundären Elektronen, deren Geschwindigkeit nach den Beobachtungen von Füchtbauer nahe gleich und von derselben Größenordnung ist, wie sie die vom Licht erzeugten Elektronen besitzen, und die in der Tat der Größenordnung nach mit der hier geforderten mittleren lebendigen Kraft der Elektronen übereinstimmt, bei der Erzeugung des Leuchtens eine wesentliche Rolle spielen, wie denn auch bereits von Einstein<sup>1)</sup> ein Zusammenhang zwischen den Elementarquanten der Energie und den Geschwindigkeiten der lichtelektrischen Elektronen vermutet wurde.

Bei der ausgeführten Berechnung der Temperatur haben wir die ganze in der  $H_{\beta}$ -Linie des Wasserstoffs ausgesandte Energie im Vergleich zu dem Elementarquantum der Energie, das der Schwingungszahl der  $H_{\beta}$ -Linie entspricht, zugrunde gelegt.

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17. p. 146. 1905.

Das ist bis zu einem gewissen Grade willkürlich. Da die Linie selbst nicht absolut homogenem Licht entspricht, sondern eine gewisse Breite hat, ein Umstand, der überhaupt erst erlaubt, ihr eine Entropie zuzuschreiben, so hat die Linie auch eine ausgedehnte Mannigfaltigkeit von Schwingungszahlen. Nun kann aber nicht jeder einfachen Schwingungszahl ein Energieelement entsprechen. Einer einfachen Schwingungszahl würde in der Energiekurve des Wärmespektrums ein unendlich schmaler Streifen von unendlich kleinem Energiebetrage entsprechen, während das Energieelement endlich ist. Nach der oben vorgetragenen Auffassung ist ein Energieelement das von einem Atom nach einmaliger Erregung bez. bei Aufnahme eines Elektrons durch Strahlung abgegebene Energiequantum. Diese Hypothese bestimmt aber noch nicht die Verhältnisse eindeutig. Wir vermögen nicht eine begründete Bestimmung darüber zu treffen, ob wir jede im Spektrum einfach erscheinende Linie als selbständig anzusehen haben, der eine bestimmte Entropie zukommt.

Es wird das besonders dadurch fraglich, daß man, wie beim Zeemanschen Phänomen, aus einer Linie durch magnetische Einwirkung mehrere erhalten kann.

Es ist indessen, wie mir scheint, nicht im Widerspruch mit der Planckschen Theorie, wenn man der zu einem Energiequantum gehörenden Schwingungszahl einen gewissen Spielraum gestattet, der unter normalen Verhältnissen durch die natürliche Breite der Spektrallinie bestimmt ist. Verbreiterung der Linie wäre zu deuten als gegenseitige Beeinflussung der Atome, so daß die Strahlung nicht mehr als Summe der Ausstrahlung der einzelnen leuchtenden Atome aufgefaßt werden kann.

Die einfachen Linien als selbständig anzusehen, denen eine Entropie im obigen Sinne zukommt und deren Energieelement sich aus ihrer mittleren Schwingungszahl berechnet, scheint mir daher zunächst die einfachste Auffassung zu sein. Immerhin wird niemand verkennen, daß die Bestimmung der Temperatur, die  $H_p$  zukommt, einen aus mehr als einem Grunde hypothetischen Charakter hat.

Es muß hier noch auf eine Schwierigkeit hingewiesen werden, die in der vorgetragenen Auffassung liegt. Wenn wir

ein dynamisches Gleichgewicht der Ionen mit den Elektronen haben, so ist es wahrscheinlich, daß auch die gewöhnlichen Leitungselektronen sich mit den Ionen in ein solches Gleichgewicht setzen. Während nach dem oben Auseinandergesetzten die Zahl der wirklich zum Leuchten gebrachten gegenüber den nicht leuchtenden klein ist, kann durch die Leitungselektronen eine größere Zahl von Ionen vorübergehend neutralisiert werden. Dann würde die Anzahl  $N$  der Ionen, gemessen durch den positiven Kanalstrahlenstrom, zu klein ausfallen und die obigen Zahlen erhielten eine entsprechende Modifikation.

Wenn in Ergänzung einer früher von mir gemachten Annahme<sup>1)</sup> die Möglichkeit ins Auge gefaßt wird, daß die verschieden starken magnetischen Ablenkungen der Kanalstrahlen dadurch zustande kommen, daß ein Teil der Ionen seine Ladung auf der Bahn verliert und wieder aufnimmt, so ist es möglich, aus diesen Ablenkungen auf die richtige Ionenzahl zu schließen, und ich beabsichtige besondere Untersuchungen nach dieser Richtung hin anzustellen.

Andererseits kann, wenn ein Ion mehrere Elektronen abgegeben hat, die Anzahl  $N$  zu groß gemessen werden.

#### § 5. Über die Zusammenstöße der fliegenden Kanalstrahlteilchen mit ruhenden Atomen.

Nach einer bekannten Betrachtung der kinetischen Gastheorie<sup>1)</sup> ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein fliegendes Atom auf der Strecke  $r$  mit den ruhenden nicht zusammenstößt,

$$e^{-\alpha_1 r},$$

wo  $\alpha_1 = N\pi R^2$  ist, wenn  $N$  die Anzahl der Atome in der Volumeinheit,  $R$  der Radius des Atoms (oder der Wirkungssphäre) ist. Da nun die Atome des Gases gegenüber den großen Geschwindigkeiten der Kanalstrahlen als ruhend angesehen werden können und andererseits die Zusammenstöße der positiv geladenen Teilchen mit ruhenden die Zahl der ersteren verringern muß, so werden wir die Zahl dieser der Größe  $e^{-\alpha_1 r}$  proportional setzen können. Dann ist  $\alpha_1$  der Absorptionsindex der Kanalstrahlteilchen und dieser muß uns etwas über die Zusammenstöße aussagen.

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 13. p. 677. 1904.

Um die Anzahl der  $N$  der Atome in der Volumeinheit zu kennen, wurde die Dichte des Gases mit einem McLeod'schen Manometer von 500 ccm Inhalt gemessen. Hierbei konnte natürlich nicht der stationäre Gasstrom unterhalten werden, da bei diesem die Dichtigkeit nicht überall gleich ist. Es wurde deshalb die Füllung mit reinem Wasserstoff vorgenommen und längere Zeit gewartet, bis der Druck sich ausgeglichen hat. Dann wurde die Entladungsspannung und die entsprechende Dichte beobachtet. Die graphische Darstellung dieser Beobachtungen zeigt Fig. 3. Die Beobachtung des Ab-

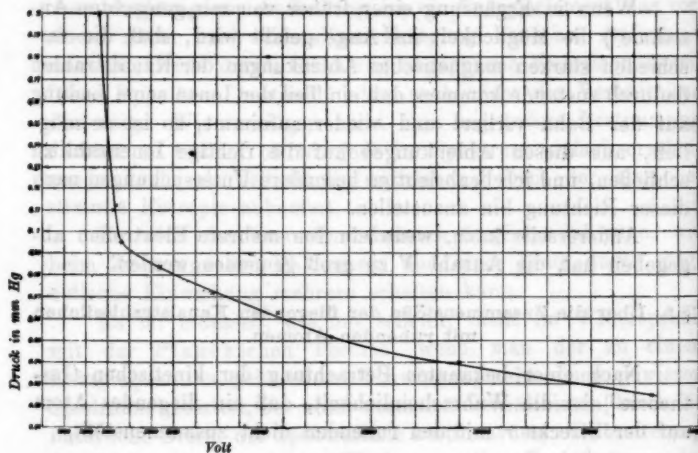


Fig. 3.

sorptionsindex der Kanalstrahlen geschah durch den beweglichen, in § 2 beschriebenen Empfänger, der in verschiedene Entfernung von der Kathode gebracht wurde. Es wurde in den verschiedenen Stellungen der Strom gemessen. Hierbei ergab sich, daß der Wert von  $\alpha_1$  bei kleiner Entfernung von der Kathode kleiner war als bei größerer, so daß der Absorptionsindex mit der Entfernung zunimmt.

Bei größerer Entfernung werden die Werte von  $\alpha_1$  konstanter und es wurden nun die Werte von  $\alpha_1$  in größerer Entfernung bei verschiedener Gasdichte und Geschwindigkeit miteinander verglichen.

Im folgenden sind einige der erhaltenen Werte zusammen-  
gestellt.

Spannung in Volt	$s_1$ in mm Hg	$\alpha_1$ pro cm	$R \cdot 10^9$ cm
1550	0,47	0,21	1,67
2660	0,20	0,08	1,60
3150	0,18	0,07	1,8
4800	0,087	0,036	1,58
10800	0,061	0,02	1,4

Man sieht hieraus zunächst, daß der Wert von  $R$  ziem-  
lich unabhängig ist von der Geschwindigkeit der Ionen. Er  
ist aber auch weit kleiner als die Werte, die aus der kinetischen  
Gastheorie folgen.

Fassen wir zum Schluß die Ergebnisse zusammen.

I. In den §§ 1 und 2 ist die mittlere Energie bestimmt,  
welche ein Wasserstoffatom im positiv geladenen Zustande in  
der Linie  $H_\beta$  in der Zeiteinheit aussendet. Diese Fragestellung  
und Beobachtungsmethode sind unabhängig von den weiteren,  
zum Teil hypothetischen Betrachtungen.

II. In § 3 wird die mittlere Schwingungsenergie eines  
Wasserstoffions unter der Annahme bestimmt, daß die Dämpfung  
nur durch Strahlung erfolgt und durch den Wiechertschen  
Wert bestimmt ist. Mit der Dämpfung hängt unmittelbar zu-  
sammen der Absorptionsindex, wenn die einzelnen Oszilla-  
toren einander nicht beeinflussen. Möglicherweise läßt sich  
die Dämpfung durch Beobachtung des Absorptionsindex be-  
stimmen.

III. In § 4 wird unter Zugrundelegung der Planckschen  
Theorie der Elementarquanten der Energie aus dem erhaltenen  
Wert der mittleren Energie im Verhältnis zum Elementar-  
quantum hypothetisch die Temperatur berechnet, die dem  
Leuchtprozeß von  $H_\beta$  zukommt.

Hierbei ist hypothetisch:

1. daß der Emission der Linienspektren eine Temperatur  
überhaupt zukommt und daß sie dann durch die Plancksche  
Theorie bestimmt wird;



2. daß die Emission der Linie  $H_\beta$  als selbständiger und einheitlicher Vorgang aufzufassen ist, dem eine bestimmte Entropie und Temperatur zuzuschreiben ist;

3. daß durch den Kanalstrahlstrom die Anzahl der Ionen richtig bestimmt wird.

IV. In § 5 wird aus dem Absorptionsindex der Kanalstrahlen im Gase bei verschiedener Dichte auf den Wirkungsradius der einzelnen Atome geschlossen, der sich merklich unabhängig von der Dichte des Gases und der Geschwindigkeit erweist.

Würzburg, Physik. Institut, Mai 1907.

(Eingegangen 9. Mai 1907.)

### 3. Über die Polarisation der Röntgenstrahlen und der Sekundärstrahlen; von H. Haga.

Bei seinen in 1904 und 1905 mitgeteilten<sup>1)</sup> Versuchen verglich Barkla mittels zwei geladener Elektroskope das Entladungsvermögen der durch Papier, Aluminium und Luft ausgesandten sekundären Röntgenstrahlen in senkrecht zu den einfallenden Strahlen stehenden Richtungen und fand einen Unterschied von 11–20 Proz. in Richtungen, die einen Winkel von  $90^\circ$  miteinander bildeten; die Stellen des maximalen und minimalen Entladungsvermögens wechselten ihre Lagen durch eine Drehung der Röntgenröhre von  $90^\circ$  um die Richtung des die Sekundärstrahlen erregenden Strahlenbündels. Barkla folgerte aus diesen Versuchen, daß die Röntgenstrahlen zum Teil polarisiert seien.

In einer späteren Arbeit<sup>2)</sup> zeigte Barkla, daß die durch eine Kohleplatte ausgesandten Sekundärstrahlen vollkommen polarisiert sind; auch dieses Resultat erhielt er mit den Elektroskopen, auf welche die tertiären Strahlen fielen, die von einem zweiten durch jene Sekundärstrahlen bestrahlten Kohlenstück ausgesandt wurden.

Von diesen beiden Resultaten habe ich nur das letztgenannte photographisch bestätigen können.<sup>3)</sup> Meine Versuchsanordnung ist aus der Figur, welche in ungefähr ein Drittel der Größe einen horizontalen Durchschnitt durch die Mitte darstellt, ersichtlich.

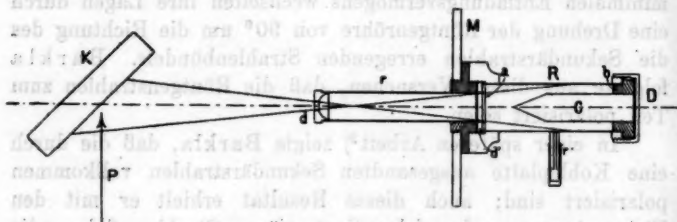
Die 4 mm dicke Messingplatte *M* ist mit einem eisernen Winkelstück auf der oberen Fläche eines eisernen Balkens befestigt; in dieser Platte ist ein 7 cm langes, 1,5 cm weites Messingrohr *r* mittels eines mit einem Schraubengewinde versehenen aufgelöteten Messingringes festgeschraubt; an der

1) C. G. Barkla, Nature 17. März 1904, 9. März 1905; Phil. Trans. Roy. Soc. London 204. p. 467. 1905.

2) C. G. Barkla, Proc. Roy. Soc. London 77. p. 247. 1906.

3) H. Haga, Proc. Roy. Acad. Amsterdam 30. Juni 1906.

rechten Seite dieses Ringes war ebenfalls ein Schraubengewinde geschnitten, auf welches die 2,5 cm weite, 7 cm lange Röhre *R* geschraubt wurde. Die eine Öffnung dieser Röhre, *a*, war mit einer schwarzen Papierscheibe geschlossen und mit einem Diaphragma *d* mit einer Öffnung von 14 mm versehen; in die andere Öffnung, *b*, paßte genau ein Hartgummiring, in dessen Mitte ein 6 cm langer, 14 mm dicker Kohlestab mit einer 17 mm langen, kegelförmigen Spitze befestigt war. Da die beiden Messingröhren, der Hartgummiring und Kohlestab sorgfältig auf der Drehbank gearbeitet waren, fielen ihre Achsen zusammen. Ein Messingdeckel *D* konnte auf das rechte Ende der Röhre *R* geschraubt werden, wodurch ein völlig lichtdichter Abschluß der Röhre entstand, und es möglich war, im Dunkelzimmer in die Röhre *R* ein Rollfilmstück hinein zu



schieben, es mit einem Paar federnder Metallringe an die Innenwand zu drücken, so daß diese ganz mit dem Film bekleidet war.

In dem an der Wand der Röhre *R* angelöteten und verschließbaren Röhrchen *r'* war ein nach der Achse durchbohrtes Stäbchen eingeschoben; durch diese Bohrung und ein korrespondierendes kleines Loch in der Wand der Röhre *R* wurde mittels einer feinen Nadel ein kleines Loch in das Film eingestochen; da bei den Versuchen das Seitenröhrchen horizontal war, gab die durch dieses kleine Loch gehende erzeugende gerade Linie den Teil des zylinderförmig gebogenen Films an, der sich in der horizontalen Ebene befand.

Dieser Apparat wurde vor der Kohleplatte *K* so aufgestellt, daß die von dieser ausgesandten Sekundärstrahlen durch das 5 mm weite Diaphragma *d* und das Diaphragma *d* in die Röhre *R* fielen. Diese Diaphragmen waren so dimensioniert,

daß nur der hintere Teil des Films von den Sekundärstrahlen getroffen werden konnte, nicht aber der dem Kegel gegenüber befindliche Teil; auf diesen Teil konnten also nur die vom Kegel ausgesandten tertiären Strahlen einwirken. In der horizontalen Richtung *P* fielen die primären Röntgenstrahlen auf die Platte *K*, welche sich so nahe wie möglich bei der Röntgenröhre befand. Dicke Bleiplatten, zusammen 1,5 cm, schützten das Film in der Röhre *R* gegen eine direkte Wirkung der primären Strahlen; die Röhre *r* war umgeben von einem 8 mm dicken Bleizylinder. Zur Erzeugung der Röntgenstrahlen diente ein von Siemens & Halske gelieferter Induktor von 60 cm Funkenlänge mit vierteiliger Primärspule, ein Wehnelt-interruptor und eine Akkumulatorenbatterie von 65—110 Volt; der Strom war 2—4 Amp.; es wurden Müllersche Röhren mit Wasserkühlung benutzt.

Eine deutliche Schwärzung des Films zeigte sich nach einer 60stündigen Expositionszeit, und immer erhielt ich zwei Maxima und zwei Minima; die Entfernung zwischen den Maximis und zwischen den Minimis war immer gleich dem halben Umfang des Durchschnitts der Röhre *R*; das oben-erwähnte kleine Loch befand sich in einem der Maxima, so daß bei der beschriebenen Anordnung die Sekundärstrahlen eine maximale Wirkung in der horizontalen, eine minimale in der vertikalen Ebene zeigten. Dies ist also ganz dasselbe, was man bei einem entsprechenden Versuch mit Licht erhalten würde; wäre z. B. *K* ein Spiegel aus schwarzem Glase, auf welchen in der Richtung *P* Lichtstrahlen fielen, und *C* ein Glaskonus, so würde man auf dem Film an denselben Stellen wie oben Maxima und Minima erhalten haben.

Die Sekundärstrahlen sind also polarisiert und, da die Schwärzung der Minima äußerst gering ist, sind sie vorläufig als vollkommen polarisiert anzusehen.

Nach dieser Auffassung kann man die Kohleplatte als Polarisator, den Kohlekegel als Analysator betrachten.

Nicht nur Kohle kann als Polarisator wirken; ebenso wirkten die untersuchten Stoffe: Kupfer, Blei, Aluminium; doch war deren Wirkung quantitativ nicht dieselbe. Während mit einer Kupferplatte ungefähr dieselbe Schwärzung wie mit der Kohleplatte erhalten wurde, senden Blei und Aluminium

in viel geringerer Intensität Sekundärstrahlen aus, so daß auch die vom Kohlekegel ausgesandten Tertiärstrahlen sehr schwach sind. Trotzdem waren zwei Maxima und zwei Minima erkennbar.

Statt des Kohlekegels habe ich auch einen Kupferkegel als Analysator bei Anwendung einer Kupferplatte als Polarisator benutzt; ich erhielt, wenn auch sehr schwach, doch dasselbe Resultat.

Im ganzen sind die folgenden Aufnahmen gemacht worden:

<i>Polarisator</i>	<i>Analysator</i>	
Kohleplatte	Kohlekegel	4
Kupferplatte	"	3
"	Kupferkegel	1
Aluminiumplatte	Kohlekegel	2
Bleiplatte	"	1

Ich möchte noch bemerken, daß, wie leicht erklärlich, ein genaues Zusammenfallen der Achsen des Kegels und der Röhren  $r$  und  $R$  sehr wichtig ist; bei der nicht so genau gearbeiteten, in den Proceedings Royal Academy Amsterdam abgebildeten, Vorrichtung erhielt ich bei zwei Aufnahmen einen beträchtlichen Unterschied in der Schwärzung der beiden Maxima.

Man könnte nun gegen diese Versuche noch zwei Einwände erheben:

1. Der Teil der Kohleplatte, der die Sekundärstrahlen durch die Diaphragmen sendet, steht schief zur Achse des Kegels und auch zur Richtung der auffallenden primären Strahlen; es ließ sich denken, daß dadurch die Intensität des Sekundärstrahlenbündels nicht in allen Punkten eines senkrecht zur Kegelachse stehenden Querschnittes dieselbe wäre, und daß so eine ungleiche Schwärzung des Films verursacht wäre. Um dieses zu prüfen, wurde statt des Kohlekegels eine photographische Platte senkrecht zur Achse der Röhre  $R$  angebracht; eine Expositionsdauer von 26 Stunden gab ein sehr deutliches Bild, worin keine ungleichmäßige Intensität merkbar war; nur am Rande war ein Halbschatten zu sehen.

2. Es wäre möglich, daß während der langen Versuchsdauer die primären Röntgenstrahlen durch die Bleiplatten und

die Messingröhre auf das Film eingewirkt hätten. Gegen diesen Einwand spricht erstens das obenerwähnte Versuchsergebnis, daß unter übrigens gleichen Umständen die Schwärzung des Films bei einer Aluminium- oder Bleiplatte als Polarisator sehr schwach ist, und zweitens die Tatsache, daß keine Schwärzung entstand unter den federnden Metallringen.

Da demnach der Kohlekegel in der mit Film bekleideten Röhre als Analysator dienen kann, konnte auch untersucht werden, ob die primären Röntgenstrahlen polarisiert sind. Sehr viele Versuche habe ich hierüber angestellt mit weichen, mit harten und mit erwärmten Röhren, sowie auch mit einer Müller-röhre Nr. 20, die nur weiche Strahlen gibt; immer erhielt ich eine gleichmäßige Schwärzung des Films bei gut zentrierter Aufstellung, d. h. falls die Achse des auffallenden Bündels mit der des Kegels zusammenfällt. Wie in der folgenden Mitteilung<sup>1)</sup> gezeigt wird, gibt es ein einfaches Mittel zum Konstatieren, ob diese Achsen zusammenfallen. Wenn aber absichtlich oder wegen eines Aufstellungsfehlers jene Achsen nicht zusammenfielen, so erhielt ich zwar eine ungleiche Schwärzung, aber nie zwei Maxima und zwei Minima nach den verschiedenen Quadranten. Nach meinen Versuchen sind die *primären Röntgenstrahlen nicht polarisiert*.

Es ist schwer, mit Bestimmtheit zu sagen, welcher Ursache Barklas abweichendes Resultat zuzuschreiben sei; am wahrscheinlichsten kommt es mir vor, daß auch hier gilt, was R. v. Lieben<sup>2)</sup> über seine eigenen Versuche über die Polarisation der Röntgenstrahlen schreibt: „Zahlreiche Kontroll-experimente mit der neuen und mit der früher beschriebenen Anordnung gaben das Resultat, daß die zuerst benützte Versuchsanordnung eine Polarisation der weichen Strahlung nur vorgetäuscht hatte. Es gehen nämlich nicht nur vom Brennpunkte der Antikathode, sondern auch von der Glaswand der Röhre wirksame Röntgenstrahlen aus. Diese Strahlung ist nicht gleichmäßig, sondern es gibt gewisse Flächen, die stärker strahlen und hierdurch eine Asymmetrie bedingen. Nun wurde bei der früheren Anordnung die Bleiblende so groß gewählt,

1) H. Haga, Ann. d. Phys. 23. p. 445. 1907.

2) R. v. Lieben, Physik. Zeitschr. 5. p. 72. 1904.

daß auch die ungleich emittierende Wand der Röntgenröhre ihre Strahlung auf den Metallspiegel warf. Diese inhomogene Zusatzstrahlung hatte zur Folge, daß bei einer Drehung der Röhre (um die Strahlung als Achse) sich sowohl die Form der bestrahlten Spiegelfläche als auch die Strahlungsintensität auf derselben änderte.“

Die Öffnungen in den Bleibenden waren bei Barkla  $5 \times 5$  cm, bei den ersten v. Liebenschens Versuchen wurde eine runde Öffnung von 10 mm Durchmesser benutzt, bei den letzten eine von 1 mm.

Da bei meiner Versuchsanordnung eine Polarisation sich durch das Auftreten von zwei Maximis und zwei Minimis nach den vier Quadranten kundgibt, konnte diese eventuell bestehende Fehlerquelle mich nicht täuschen.

Obgleich die primären Röntgenstrahlen nicht polarisiert sind, so ist, wie ich meine, dennoch der Hauptzweck meiner Untersuchung, nl. zu entscheiden, ob die Röntgenstrahlen transversale oder longitudinale Gleichgewichtsstörungen sind, völlig erreicht. Haben doch die bei meinen Versuchen in Betracht kommenden Sekundärstrahlen — in gewöhnlicher Luft, und einige Zentimeter entfernt von dem die Strahlen aussendenden Körper — ganz denselben Charakter wie die primären Strahlen; nicht nur gingen sie durch das schwarze Papier bei *a*, sondern sogar durch den 6 cm langen Kohlestab und schwärzten eine im Deckel *D* angebrachte photographische Platte. Sind also die primären und sekundären Röntgenstrahlen von derselben Natur, so sind, da die Sekundärstrahlen polarisiert sind, die primären Röntgenstrahlen nur als ein transversaler Vorgang aufzufassen.

Groningen, Physik. Institut der Universität.

(Eingegangen 1. Mai 1907.)



#### 4. Über einen merkwürdigen Fall von selektiver Absorption bei Röntgenstrahlen; von H. Haga.

Bei meinen Versuchen über die Polarisation<sup>1)</sup> von Röntgenstrahlen ließ ich u. a. ein Strahlenbündel axial durch eine Messingröhre fallen, in deren Achse ein 4 cm langer, 1 cm dicker Kohlestab mittels eines Hartgummiringes angebracht war. Das Bündel war durch Diaphragmen so abgeblendet,

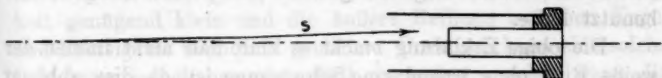


Fig. 1.

daß seine Grenze zwischen dem Kohlestab und der Innenwand der Röhre lag. Um der Röntgenröhre die dafür erforderliche Stelle zu geben, wurde gegen den Hartgummiring ein fluoreszierender Schirm gehalten und die Röntgenröhre so lange verschoben, bis der Schatten der Kohle konzentrisch in dem auf dem Schirme sichtbaren Durchschnitt des Bündels sich zeigte. Hierbei erschien der Schatten des Stabes umgeben von einem schmalen dunklen Ringe. Wurde eine photographische Aufnahme gemacht, so zeigte sich natürlich ein heller Ring um das Bild der Kohle. Fig. 2 ist ein positives Bild einer dieser Aufnahmen. Die Erklärung dieses hellen Ringes ergibt sich aus den folgenden Tatsachen: Bei *weichen* Strahlen ist das Bild des Stabes dunkler als das des Ringes. Bei *harten* Strahlen ist aber der Ring dunkler als die Mitte. Das heißt also, der Kohlestab läßt von den *weichen* Strahlen mehr durchgehen als der Hartgummiring; der Hartgummiring dagegen läßt von den *harten* Strahlen mehr durch als der Kohlestab; oder anders gesagt: Der Kohlestab absorbiert hauptsächlich die



Fig. 2.

1) H. Haga, Ann. d. Phys. 23. p. 439. 1907.

härteren, der Hartgummiring absorbiert hauptsächlich die weiche Strahlen. Da nun die Röntgenröhre gewöhnlich ein Gemisch von harten und weichen Strahlen aussendet, werden von denjenigen Strahlen die, wie  $\delta$  in Fig. 1, einen kleinen Winkel mit der Achse bilden, in der Kohle die härteren absorbiert werden, so daß sie beim Austreten aus der Kohle hauptsächlich aus weichen Strahlen bestehen, welche gerade vom Hartgummi absorbiert werden, so daß dicht um das Bild des Stabes herum keine Schwärzung der photographischen Platte stattfindet.

Es ist also ganz ähnlich, als wenn man einen Glasstab aus rotem, einen Ring aus grünem Glase und weißes Licht benutzt hätte.

Die obige Erklärung macht es klar, daß nicht immer der weiße Ring ohne irgend eine Schwärzung ist, da dies abhängt vom Gemisch der harten und weichen Strahlen, die die Röhre aussendet; manche Aufnahme habe ich aber gemacht, wobei der Ring kaum einige Einwirkung zeigt.

Bei meinen Versuchen über die Polarisation wurde immer zu gleicher Zeit eine Aufnahme senkrecht zur Achse gemacht, um das Zusammenfallen der Achsen des auffallenden Bündels und des Kohlestabes bez. Kohlekegels zu konstatieren: nur wenn der weiße Ring überall gleich breit war, fand das Zusammenfallen statt.

Groningen, Physik. Institut der Universität.

(Eingegangen 1. Mai 1907.)



Die obige Erklärung macht es klar, daß nicht immer der weiße Ring ohne irgend eine Schwärzung ist, da dies abhängt vom Gemisch der harten und weichen Strahlen, die die Röhre aussendet; manche Aufnahme habe ich aber gemacht, wobei der Ring kaum einige Einwirkung zeigt.

**5. Über den Einfluß von Wänden  
auf die Bewegung einer Kugel in einer  
reibenden Flüssigkeit<sup>1)</sup>;  
von Rudolf Ladenburg.**

Fällt eine Kugel unter dem Einfluß der Schwere in einer reibenden Flüssigkeit, so ist nach einer Berechnung von G. G. Stokes<sup>2)</sup> die Kugelgeschwindigkeit nur abhängig von dem Auftrieb und dem Radius der Kugel und der inneren Reibung der Flüssigkeit, vorausgesetzt, daß diese Geschwindigkeit genügend klein und die äußere Reibung zwischen Kugel und Flüssigkeit unendlich groß ist. Praktisch kann eine solche Beziehung jedoch nur als erfüllt angesehen werden, wenn die Bewegung der Kugel weder durch benachbarte andere Kugeln gestört wird noch durch Wände, die die Flüssigkeit begrenzen. So zeigten Experimente<sup>3)</sup> in zylindrischen, beiderseitig geschlossenen Gefäßen noch einen merklichen hemmenden Einfluß der Wände, als die Dimensionen der Gefäße die der Kugel um fast das 100 fache übertrafen, und es schien mir deshalb wichtig, den Einfluß solcher Begrenzungen auch theoretisch zu berechnen.

Ich möchte auch an dieser Stelle Hrn. Prof. Korn meinen aufrichtigen Dank sagen, der mir den Weg zur Ausrechnung zeigte und mich bei der Ausführung in liebenswürdigster Weise unterstützte.

Man kann den Einfluß beliebiger Flächen auf die Bewegung eines Körpers in einer reibenden Flüssigkeit nach H. A. Lorentz<sup>4)</sup> durch Superposition der Zustände bestimmen,

1) Die Resultate vorliegender Arbeit sind zum Teil schon in der Münchener Dissertation des Verf. (Leipzig 1906) enthalten und bilden eine theoretische Ergänzung zu der Mitteilung des Verf., „Über die innere Reibung säher Flüssigkeiten und ihre Abhängigkeit vom Druck“ Ann. d. Phys. 23. p. 287. 1907.

2) G. G. Stokes, Cambr. Phil. Trans. 8. p. 287; 9. p. 8. 1850.

3) R. Ladenburg, l. c.

4) H. A. Lorentz, Zittingsverl. Akad. van Wet. 5. p. 168. 1896; neu bearb.: „Abhandl. über theor. Phys.“ 1<sup>1</sup>. p. 23 ff. 1906 (Teubners Verlag). Dieselbe Methode findet sich bereits bei G. G. Stokes, Cambr. Phil. Soc. 8. 1848.

die durch Reflexion („Zurückwerfung“) der ursprünglichen Bewegung an den Flächen und an dem Körper selbst entstehen. Sind die Dimensionen des Körpers unendlich klein und geht die Bewegung vom Körper selbst aus, so genügt<sup>1)</sup> die Kenntnis der ersten Reflexion von jenen Flächen; ist der Körper z. B. eine Kugel, so kann man<sup>1)</sup> aus der Geschwindigkeit, die infolge der ursprünglichen Bewegung und jener ersten Reflexion bei Abwesenheit der unendlich kleinen Kugel an ihrem Mittelpunkt herrschen würde, den Widerstand berechnen, den die Kugel bei ihrer Bewegung erfährt.

Bei der Bewegung einer Kugel in einer geschlossenen Röhre wäre also die Reflexion der für den unendlichen Raum geltenden Bewegung von einem begrenzten Zylinder zu berechnen; da ich hierbei auf unüberwindliche Schwierigkeiten stieß, habe ich mich auf die Berechnung und Superposition der Geschwindigkeiten beschränken müssen, die durch Reflexion von einem unendlich langen Zylinder und von zwei unendlich ausgedehnten Ebenen entstehen, deren Abstand gleich der Röhrenlänge ist. Diese vereinfachenden Annahmen scheinen mir aber bereits eine beträchtliche Annäherung an die wahren Versuchsbedingungen zu liefern, da die Geschwindigkeiten, die die unendlich kleine Kugel hervorruft, auch in endlicher Entfernung unendlich klein<sup>1)</sup> sind.

Die hydrodynamischen Grundgleichungen der stationären Bewegung einer reibenden Flüssigkeit lauten<sup>2)</sup>, wenn man die Glieder vernachlässigt, die Quadrate oder Produkte von Geschwindigkeiten enthalten, und wenn keine äußeren Kräfte auf die Flüssigkeit wirken:

$$(1) \quad k \Delta u = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad k \Delta v = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad k \Delta w = \frac{\partial p}{\partial z},$$

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

wobei  $u, v, w$  die Geschwindigkeitskomponenten der Flüssigkeitsteile in Richtung der Koordinatenachsen  $X, Y, Z$ ,  $k$  den Reibungskoeffizienten und  $p$  den Druck bedeuten und die Flüssigkeit

1) H. A. Lorentz, l. c. p. 30.

2) Vgl. z. B. G. Kirchhoff, Vorl. über Mechanik, 4. Aufl. p. 378 ff. 1897, oder H. A. Lorentz, l. c. p. 30.

als unbegrenzt vorausgesetzt ist. Bewegt sich in dieser Flüssigkeit eine Kugel vom Radius  $R$  in Richtung der negativen  $Z$ -Achse mit der gleichförmigen Geschwindigkeit  $a$ , so genügen den Differentialgleichungen (1) und (2), wenn der Mittelpunkt der Kugel Koordinatenanfangspunkt und die äußere Reibung zwischen Kugel und Flüssigkeit unendlich groß ist, die Funktionen <sup>1)</sup>:

$$(3) \quad \begin{cases} u_1 = \frac{3}{4} a R^3 \frac{xz}{E^3} - \frac{3}{4} a R \frac{xz}{E^3}, \\ v_1 = \frac{3}{4} a R^3 \frac{yz}{E^3} - \frac{3}{4} a R \frac{yz}{E^3}, \\ w_1 = \frac{a R^3}{4} \left( \frac{3x^2}{E^3} - \frac{1}{E^3} \right) - \frac{3}{4} a R \left( \frac{x^2}{E^3} + \frac{1}{E} \right), \end{cases}$$

$$p_1 = -\frac{3}{2} k R a \frac{z}{E^3} + \text{konst.},$$

wobei

$$E^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

gesetzt ist.

Um nun zunächst die Reflexion dieser Bewegung von einem unendlich langen Zylinder zu berechnen, dessen Achse mit der  $Z$ -Achse zusammenfällt und dessen Querschnittsradius  $\rho$  sei, führe ich in der  $XY$ -Ebene die Polarkoordinaten  $r$  und  $\vartheta$  ein und setze

$$x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta \quad \text{und} \quad \frac{dr}{dt} = s.$$

Berücksichtige ich, daß in diesem Falle  $d\vartheta/dt$  offenbar Null ist und setze noch zur Abkürzung für eine beliebige Funktion  $\varphi$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = D\varphi,$$

so wird

$$\Delta \varphi = D\varphi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2},$$

und durch Vernachlässigung der Glieder mit  $R^3$  in den Gleichungen (3) gehen die Gleichungen (1), (2) und (3) über in

$$(1a) \quad \begin{cases} Ds - \frac{s}{r^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial r}, \\ Dw = \frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial z}, \end{cases}$$

$$(2a) \quad \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{s}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

1) G. Kirchhoff, l. c., oder H. A. Lorentz, l. c.

$$(3a) \quad \begin{cases} s_1 = -\frac{3}{4} a R \frac{r z}{E^3}, \\ w_1 = -\frac{3}{4} a R \left( \frac{r^2}{E^3} + \frac{1}{E} \right), \\ p_1 = -\frac{3}{2} k R a \frac{z}{E^3} + \text{konst.}, \\ E^2 = r^2 + z^2. \end{cases}$$

Es handelt sich nun darum, neue Lösungen — im folgenden durch den Index 2 charakterisiert — der Differentialgleichungen (1a) und (2a) zu finden, die den Bedingungen genügen:

$$(4) \quad \begin{cases} (s_2)_{r=e} = -(s_1)_{r=e}, \\ (w_2)_{r=e} = -(w_1)_{r=e} \quad \text{und} \\ (s_2)_{z=\pm\infty} = (w_2)_{z=\pm\infty} = 0, \end{cases}$$

da dann offenbar der Zustand 2 die gesuchte, durch Reflexion an der Zylinderwand entstandene, Bewegung darstellt.

Zu diesem Zwecke führe ich die Besselschen oder Zylinderfunktionen erster und zweiter Art 0<sup>ter</sup> Ordnung,  $J(\Theta)$  und  $K(\Theta)$ , ein, die partielle Lösungen der Besselschen Differentialgleichung

$$(5a) \quad \frac{d^2 x}{d \Theta^2} + \frac{1}{\Theta} \frac{dx}{d \Theta} + x = 0$$

sind und nach Heine<sup>1)</sup> darstellbar in der Form:

$$(5b) \quad J(\Theta) = 1 - \frac{\Theta^2}{2^2} + \frac{\Theta^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{\Theta^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$$

und

$$(5c) \quad \begin{cases} K(\Theta) = -J(\Theta) \left( \ln \frac{\Theta}{2} + C \right) \\ - 2 \left[ J_2(\Theta) - \frac{1}{2} J_4(\Theta) + \frac{1}{3} J_6(\Theta) - \dots \right]. \end{cases}$$

Hierbei sind  $J_2, J_4, \dots$  die geraden Zylinderfunktionen erster Art höherer Ordnung und  $C$ , die sogenannte Gauss'sche<sup>2)</sup> Konstante, hat den Wert<sup>3)</sup>

$$C = +0,5772157.$$

1) Heine, Theorie der Kugelfunktionen, 2. Aufl. 1. p. 184 ff. und 2. p. 175. 1878.

2) K. F. Gauss, Ges. Werke III. p. 154,  $C$  hat den Wert von  $-\psi_0$ .

3) Heine (l. c.) schreibt zwar  $-0,5772 \dots$ , doch zeigt ein Vergleich mit der Originalliteratur (Gauss, l. c. und H. F. Weber, Borch.

Nun ergibt sich aus den Gleichungen (1a), daß

$$Dp = 0$$

ist; ist also  $p_2$  der den Geschwindigkeiten  $s_2$  und  $w_2$  entsprechende Druck und  $\lambda$  eine von Null verschiedene Zahl, so kann man für  $p_2$  den Ansatz machen:

$$p_2 = \frac{2k}{\pi} \int_0^{\infty} f(\lambda) \sin \lambda z J(i\lambda r) d\lambda,$$

wobei die Funktion  $f(\lambda)$  noch näher zu bestimmen ist. Dann läßt sich zeigen<sup>1)</sup>, daß die Gleichungen (1a) befriedigt werden durch die Funktionen:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} s_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \frac{r}{2} f(\lambda) J(i\lambda r) + G(\lambda) J'(i\lambda r) \right] \sin \lambda z d\lambda \\ \text{und} \\ w_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \frac{ir}{2} f(\lambda) J'(i\lambda r) + H(\lambda) J(i\lambda r) \right] \cos \lambda z d\lambda; \end{array} \right.$$

hierin ist

$$J'(i\lambda r) \text{ für } \frac{\partial J(i\lambda r)}{\partial (i\lambda r)}$$

gesetzt und  $G(\lambda)$  und  $H(\lambda)$  sind zunächst willkürliche Funktionen. Da aber  $s_2$  und  $w_2$  den zwei Bedingungsgleichungen (4) und der Kontinuitätsgleichung (2a) zu genügen haben, werden die drei Funktionen  $f(\lambda)$ ,  $G(\lambda)$  und  $H(\lambda)$  eindeutig bestimmbar. Wie sich zeigen wird, genügt im vorliegenden Falle die Kenntnis von  $H(\lambda)$ , und aus jenen drei Gleichungen ergibt sich<sup>1)</sup>, wenn man

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Journ. f. Math. 75. p. 85. 1878), daß  $C$  positiv ist. Bei imaginären Werten des Argumentes ist nach Heine (l. c.) in der Darstellung für  $K(\Theta)$  der Ausdruck  $\frac{\pi}{2} i J(\Theta)$  zu addieren, so daß  $i$  im Argumente des Logarithmus fortfällt.

1) Zur genaueren Durchführung der Rechnung vgl. die Dissertation des Verf. p. 79—90.



durch den Ausdruck<sup>1)</sup>

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K(i\lambda r) \cos \lambda z d\lambda$$

ersetzt,

$$(7) \quad H(\lambda) = \frac{3}{2} R a \left[ \frac{K(i\lambda \varrho)}{J(i\lambda \varrho)} - \frac{1}{2} \frac{1 + 2 \frac{J'(i\lambda \varrho)}{i\lambda \varrho} \frac{1}{J(i\lambda \varrho)}}{J^2(i\lambda \varrho) + J'^2(i\lambda \varrho) + 2 J(i\lambda \varrho) \frac{J'(i\lambda \varrho)}{i\lambda \varrho}} \right]$$

Wie in der Einleitung auseinandergesetzt, handelt es sich nun lediglich um die Berechnung der Werte, die  $s_2$  und  $w_2$  bei Abwesenheit der Kugel am Kugelmittelpunkte, d. h. am Koordinatenanfangspunkte besitzen: für  $r = z = 0$  folgt aus den Gleichungen (6)

$$(s_2) = 0, \\ (w_2) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} H(\lambda) d\lambda = \frac{R}{\varrho} a \frac{3}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi(i\lambda \varrho) d(\varrho \lambda),$$

wenn ich die Klammer auf der rechten Seite der Gleichung (7) abkürzend durch  $\varphi(i\lambda \varrho)$  bezeichne.

Zur zahlenmäßigen Berechnung des Integrals

$$\int_0^{\infty} \varphi(i\lambda \varrho) d(\varrho \lambda)$$

habe ich in meiner Dissertation<sup>2)</sup> mit Benutzung der unendlichen Reihen (Gleichung (5b) und (5c)) die Werte von

$$J(i\lambda \varrho), \quad J'(i\lambda \varrho), \quad \frac{J'(i\lambda \varrho)}{i\lambda \varrho} \quad \text{und} \quad K(i\lambda \varrho)$$

für gewisse, geeignet scheinende Werte des Argumentes berechnet, aus ihnen jedesmal  $\varphi(i\lambda \varrho)$  zusammengesetzt und so das bestimmte Integral nach der Simpsonschen Regel ausgewertet. Bei der Zusammensetzung von  $\varphi(i\lambda \varrho)$  ist jedoch ein Rechenfehler unterlaufen, so daß sich statt der in der Dissertation<sup>3)</sup> gegebenen Zahlen der Wert von  $\varphi(i\lambda \varrho)$

1) Vgl. Heine, l. c.

2) Dissertation des Verf. p. 124—126.

3) p. 126.

für	$\lambda \varrho = \frac{1}{2}$	zu	2,79
"	"	"	"
"	"	"	2,00
"	"	"	"
"	"	"	1,35
"	"	"	"
"	"	"	0,67
"	"	"	"
"	"	"	0,31
"	"	"	"
"	"	"	0,014 ergibt,

und damit wird

$$\int_0^{\infty} \varphi(i \lambda \varrho) d(\varrho \lambda) = 2,45$$

und

$$(w_2) = 2,4 \frac{R}{\varrho} a;$$

d. h. unter dem Einfluß eines unendlich langen Zylinders vom Querschnittsradius  $\varrho$  würden sich die Flüssigkeitsteile am Mittelpunkt der Kugel mit der Geschwindigkeit  $2,4(R/\varrho)a$  in der der Kugelgeschwindigkeit entgegengesetzten Richtung — die Kugelgeschwindigkeit war in Richtung der negativen  $Z$ -Achse vorausgesetzt (p. 449) — bewegen und die relative Geschwindigkeit zwischen Kugel und Flüssigkeit würde den Wert

$$a \left( 1 + 2,4 \frac{R}{\varrho} \right)$$

annehmen.

Um ferner den Einfluß zu berechnen, den zwei einander parallele, unendlich ausgedehnte Ebenen auf die Bewegung einer Kugel zwischen ihnen ausüben, kann man die Methode verwenden, die H. A. Lorentz<sup>1)</sup> zur Berechnung der „Zurückwerfung“ von einer senkrecht zur Kugelbewegung liegenden Ebene angegeben hat. Legt man die  $XY$ -Ebene in jene reflektierende Ebene, bezeichnet mit  $\alpha$  den momentanen Abstand der Kugel von jener Ebene, mit  $E'$  die Entfernung eines Punktes  $(x, y, z)$  von demjenigen Punkte  $K'$  (vgl. Figur), der zum Kugelmittelpunkte  $K$  bezüglich der Ebene symmetrisch liegt und läßt wie bisher die Richtung der Kugelgeschwindig-



1) H. A. Lorentz, l. c.

keit mit der negativen  $Z$ -Richtung zusammenfallen, so erhält man für die allein in Betracht kommende  $z$ -Komponente der reflektierten Geschwindigkeit den Wert<sup>1)</sup>

$$w_3 = \frac{3}{4} R a \left\{ \frac{1}{E'} + \frac{x^2 + \alpha^2}{E'^3} + \frac{6 \alpha x (x + \alpha)^2}{E'^5} \right\},$$

wobei

$$E'^2 = x^2 + y^2 + (z + \alpha)^2$$

ist, und diese Bewegung würde am Mittelpunkt der Kugel eine der Kugelgeschwindigkeit entgegengesetzt gerichtete Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteile von der Größe

$$(w_3)_{x=y=0} = \frac{9}{8} \frac{R}{\alpha} a$$

hervorrufen.

Befindet sich nun auf der anderen Seite der Kugel im Abstände  $\beta$  eine zweite Ebene (II), so würde diese offenbar am Kugelmittelpunkte zu einer Geschwindigkeit

$$(w_3)' = \frac{9}{8} \frac{R}{\beta} a,$$

als Reflexion der ursprünglichen Bewegung, Veranlassung geben.<sup>2)</sup> Daneben ist aber offenbar auch die Zurückwerfung des Zustandes 3 von der Ebene II zu berücksichtigen. Um bei deren Berechnung die Lorentzsche Methode unmittelbar zu verwenden, habe ich die  $XY$ -Ebene in die Ebene II verlegt und die Richtung der  $Z$ -Achse umgedreht ( $\bar{Z}$ -Achse). Dann erhalte ich am Kugelmittelpunkte die reflektierte Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteile

$$(w_4) = \left( \frac{9}{8} \frac{1}{\alpha + \beta} + \frac{9}{8} \frac{\alpha \beta}{(\alpha + \beta)^3} \right) R a,$$

welche diesmal mit der Richtung der Kugelgeschwindigkeit zusammenfällt, also den Widerstand, den die Kugel erfährt, verkleinert. Derselbe Wert würde sich aus Symmetriegründen für die Zurückwerfung des Zustandes 3' von der Ebene I ergeben. Reflektiert man weiter die Bewegung 4 an der Ebene I,

1) Vgl. H. A. Lorentz, l. c. p. 40.

2) Daß sich die Kugel von dieser Ebene fortbewegt, ändert, wie die Rechnung von Lorentz zeigt, auch nichts an dem Vorzeichen der reflektierten Geschwindigkeit.

so erhält man an der Stelle des Kugelmittelpunktes die Geschwindigkeit:

$$(w_0) = \left( \frac{17}{18} \frac{1}{\alpha + \beta} + \frac{19}{27} \frac{\alpha \beta}{(\alpha + \beta)^2} \right) R a$$

und denselben Wert offenbar für die entsprechende Reflexion an der Ebene II. Wie man sieht, werden die reflektierten Geschwindigkeiten allmählich kleiner, aber nicht von einer höheren Ordnung unendlich klein; doch genügt, wie sich zeigen wird, die durch die berechneten Reflexionen erreichte Genauigkeit.

Ich komme nun zur Bestimmung des Widerstandes. Bewegt sich die Kugel von einem Punkte

$$z = (\alpha + \beta) - \frac{\alpha + \beta}{\gamma} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} (\alpha + \beta),$$

wobei  $\gamma > 1$ , bis zu einem Punkte

$$z = \frac{\alpha + \beta}{\gamma}$$

in Richtung der negativen Z-Achse, so ist der mittlere Wert der durch die einzelnen Reflexionen hervorgerufenen Geschwindigkeiten der Flüssigkeitsteile<sup>1)</sup>, wenn man  $\alpha + \beta = h$  setzt, infolge der ersten beiden Reflexionen:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\gamma-2} \frac{1}{h} \int_{\frac{h}{\gamma}}^{\frac{\gamma-1}{\gamma} h} [(w_3) + (w_3')] dz &= \frac{\gamma}{\gamma-2} \frac{1}{h} \int_{\frac{h}{\gamma}}^{\frac{\gamma-1}{\gamma} h} \frac{9}{8} R a \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{h-z} \right) dz \\ &= a \frac{R}{h} \frac{9}{4} \frac{\gamma}{\gamma-2} \ln(\gamma-1); \end{aligned}$$

infolge der ersten und zweiten Reflexionen

$$a \frac{R}{h} \left[ \frac{9}{4} \frac{\gamma}{\gamma-2} \ln(\gamma-1) - \frac{27}{8} + \frac{9}{4} \frac{\gamma^2 - \gamma + 1}{3\gamma^2} \right],$$

und infolge der ersten, zweiten und dritten Reflexionen

$$a \frac{R}{h} \left[ \frac{9}{4} \frac{\gamma}{\gamma-2} \ln(\gamma-1) - \frac{27}{8} + \frac{9}{4} \frac{\gamma^3 - \gamma + 1}{3\gamma^3} + \frac{70}{27} - \frac{38}{27} \frac{\gamma^2 - \gamma + 1}{3\gamma^3} \right].$$

Um diese Beträge wird also die Geschwindigkeit der Kugel relativ zur Flüssigkeit vergrößert und dementsprechend auch der Widerstand, den die Kugel erfährt.

1) Bei dieser Berechnung ist die durch Variation des Widerstandes bewirkte geringe Änderung der Kugelgeschwindigkeit vernachlässigt.

Um nun die Ergebnisse meiner Experimente<sup>1)</sup> mit dieser Berechnung zu vergleichen, ist hierin für  $\gamma$  3,5 zu setzen, da die verwendeten Gefäße 24 cm lang waren und die Kugelgeschwindigkeit während der mittleren 10 cm beobachtet wurde. Aus obigen Formeln folgt dann für die Zusatzgeschwindigkeit

$$4,83 \frac{R}{h} a \text{ bez. } 2,05 \frac{R}{h} a \text{ bez. } 4,27 \frac{R}{h} a,$$

so daß sich der zu benutzende Wert durch geometrische Interpolation zu  $3,3(R/h)a$  ergibt. Berücksichtigt man noch die nächsten Reflexionen, so erhält man einen nicht merklich verschiedenen Wert, so daß in der Tat die hier gegebene Berechnung der drei Reflexionen ausreicht. Werden nur je 2,4 cm an den Enden der Gefäße von der Beobachtung ausgeschlossen<sup>2)</sup>, so ist  $\gamma = 10$  zu setzen, und man erhält als Zusatzgeschwindigkeit als Mittel den Wert  $4,5(R/h)a$ .

Fasse ich also nun den Einfluß des unendlich langen Zylinders und der zwei Ebenen zusammen, d. h. superponiere ich direkt die betreffenden Zusatzgeschwindigkeiten, so erhält der Widerstand<sup>3)</sup>, den die Kugel erleidet, statt

$$6\pi k R a$$

den Wert

$$6\pi k R a \left(1 + 2,4 \frac{R}{\varrho}\right) \left(1 + 3,3 \frac{R}{h}\right),$$

und dieser Ausdruck gleich

$$\frac{4}{3} \pi R^3 (s - \sigma)$$

— dem Auftrieb der unter dem Einfluß der Schwere fallenden Kugel — gesetzt, liefert an Stelle des „Stokesschen Gesetzes“

$$\bar{k} = \frac{2}{9} g R^2 \frac{s - \sigma}{a}$$

die Gleichung

$$(8) \quad k = \frac{2}{9} g R^2 \frac{s - \sigma}{a \left(1 + 2,4 \frac{R}{\varrho}\right) \left(1 + 3,3 \frac{R}{h}\right)},$$

1) Dissertation des Verf. p. 55, Tab. IVb, die zur Berechnung der Reibungskoeffizienten p. 59 verwendet wurde.

2) Diesem Falle entsprechen die Resultate der Tab. IVa; da  $R/h$  im Mittel 0,005 ist, ergibt die Theorie, daß in diesem Falle die Kugelgeschwindigkeit im Mittel etwa 1 Proz. kleiner sein muß als in jenem, in Übereinstimmung mit den Experimenten.

3) H. A. Lorentz. I. c. p. 29.

die für einen oben und unten durch ebene Flächen begrenzten Zylinder vom Radius  $\varrho$  und der Höhe  $h$  gelten soll, falls die Kugelgeschwindigkeit  $u$  im mittleren Drittel der Röhre gemessen wird.

In der Tat werden nun meine experimentell erhaltenen Resultate durch diese Gleichung (8) befriedigend dargestellt: Folgende Tabelle enthält die aus jenen Fallversuchen abgeleiteten Werte des Reibungskoeffizienten (C.G.S.), berechnet nach der unkorrigierten Stokesschen Gleichung ( $\bar{k}$ ) und nach der Gleichung (8) ( $k$ ); die Dimensionen der verwendeten Kugeln und Röhren und die Werte der beobachteten Geschwindigkeiten finden sich in den zitierten Mitteilungen.

Tabelle.

$\frac{R}{\varrho}$	$\frac{R}{h}$	$\bar{k}$	$k$
1	1	1681	1348
11,1	121		
1	1	1600	1346
14,7	160		
1	1	1515	1318
20,0	121		
1	1	1515	1349
22,2	241		
1	1	1491	1340
26,6	160		
1	1	1490	1362
29,4	320		
1	1	1456	1328
35,3	121		
1	1	1447	1344
40,1	241		
1	1	1438	1338
46,9	160		
1	1	1424	1349
53,0	320		
1	1	1415	1348
70,7	241		
1	1	1396	1347
93,5	320		

Während die aus den Fallversuchen mit verschiedenen großen Kugeln und in verschiedenen weiten Gefäßen nach der Stokesschen Gleichung berechnete „Reibungskonstante“ zwischen 1881 und 1396 variiert, erhält man nach der neuen Gleichung (8) den nahe konstanten Wert

1343

 $\pm 22$ 

und nach der Poiseuilleschen Methode hatte sich für dieselbe Flüssigkeit

1325

 $\pm 15$ 

ergehen.

Cambridge, April 1907.

(Eingegangen 22. April 1907.)



## 6. Über die lichtelektrische Ermüdung; von W. Hallwachs.<sup>1)</sup>

Die Vorgänge, welche sich bei den lichtelektrischen Erscheinungen in Gasen von Atmosphärendruck in den der Ober-

1) Für die gute Unterstützung, welche ich bei dieser Arbeit von den Herren Dr. R. Lindemann (jetzt in der Phys.-Techn. Reichsanst.) und Dr. H. Dember erhalten habe, möchte ich ihnen auch an dieser Stelle meinen besten Dank aussprechen.

Ein Auszug der vorliegenden Arbeit nach dem auf der Stuttgarter Naturforscherversammlung gehaltenen Vortrag ist *Physik. Zeitschr.* 7. p. 766. 1906 und *Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch.* 8. p. 449. 1906 veröffentlicht, ausführlich findet sich dieselbe in den Berichten der kgl. Sächs. Gesellsch. der Wissensch., math.-naturw. Kl. 58. p. 341, Oktober 1906, welche Darstellung hier mit einigen Ergänzungen versehen ist.

Seit der ersten Veröffentlichung haben die Herren Ramsay und Spencer eine lichtelektrische Untersuchung [*Phil. Mag.* (6) 12. p. 397. 1906] mitgeteilt. In derselben geben sie p. 402 an: „It is not proposed to discuss here the literature on this subject, but it may be mentioned that previous to Le Bon's publications some of his results had been anticipated, among others by Elster and Geitel, Hoor, Stoletow, Wiedemann and Ebert, Hallwachs, Righi and Branley.“ Diese Stellungnahme gegenüber der Literatur, unter welcher Hr. Lenard nicht einmal erwähnt wird, erscheint mir nicht annehmbar. Das Studium derselben würde eine andere Auffassung von dem, was auf diesem Gebiet geleistet ist, liefern. Bevor ein solches erfolgt ist, läßt sich nicht entscheiden, welche Resultate der Arbeit die Verfasser selbst etwa in die Ergebnisse früherer Beobachter z. B. als Bestätigungen einordnen würden. In der Meinung, hier nicht vorgreifen zu sollen, möchte ich mich auf obigen Hinweis beschränken.

Ferner teilt Hr. Aigner (*Wiener Ber.* IIa. 115. p. 1485. 1906) eine Reihe von Versuchen mit, welche sich mit Fragen beschäftigen, die auch in der hier vorliegenden Arbeit behandelt sind. Letztere hat er offenbar nicht gekannt, sonst würde er auf die Einwände, welche seinen Versuchsanordnungen begegnen müssen, aufmerksam geworden sein und seine Schlüsse wohl anders formuliert haben. Wenn er übrigens den starken und bereits vor mehreren Jahren von mir nachgewiesenen Gefäßeinfluß nicht konstatieren konnte, so liegt dies daran, daß er nur Gefäße von solcher Form und Größe verglichen hat, daß auch sein größtes wohl noch vollen Gefäßeinfluß ausübte, somit Unterschiede gegen die kleineren nicht merkbar werden konnten. Auf die einzelnen Punkte der Arbeit soll bei einer späteren Gelegenheit näher eingegangen werden.

fläche der bestrahlten Körper am unmittelbarsten anliegenden Schichten abspielen, harren noch immer ihrer Aufklärung. Von der genaueren Einsicht in dieselben hängt sowohl die Erklärung der lichtelektrischen Ermüdung als auch diejenige des Grundversuches der lichtelektrischen Entladung ab. Die Aufgabe, sie zu finden, ist mit der Frage verknüpft, ob hinter der Ermüdung ein physikalisch interessantes Phänomen steckt oder nicht.

Für die lichtelektrische Ermüdung habe ich in einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> eine Stufe der Erklärung gegeben. Nachdem im einzelnen der Nachweis geliefert worden war, daß die meisten der früher angegebenen Ursachen derselben (Oxydation<sup>2)</sup>, Belichtung<sup>3)</sup>, Korrosion der Oberfläche<sup>4)</sup>) keinen wesentlichen Einfluß haben, ließ sich mit Hilfe des Gefäßeinflusses und der ausgeprägten Verschiedenheit der Ermüdung von Cu und CuO zeigen, daß die Hauptermüdungserscheinung in freier Luft fast sicher dem Ozon verdankt wird.

Die vorliegende Untersuchung ergänzt zunächst den negativen Teil der vorigen durch Ausdehnung auf die mit Sonnenlicht (bei Zn) stattfindende lichtelektrische Entladung und durch weitere Versuche bezüglich der Unwirksamkeit der Korrosion. Ferner wird gezeigt, daß auch die Zurückführung auf sich bildende elektrische Doppelschichten<sup>5)</sup>, welche mir gelegentlich der vorigen Arbeit noch sehr plausibel erschienen war und ja bei Ozon als wirksamer Substanz besonders nahe lag, nicht möglich ist; nur als Nebenursache, welche schwache Ermüdung um vielleicht 20—30 Proz. veranlassen kann, mögen elektrische Doppelschichten mitwirken.

Die eingehendere Untersuchung der in Gefäßen noch vorhandenen geringen Ermüdung (auch bei H-Füllung) weist dann auf die mit der Zeit fortschreitende Gasaufnahme der Platten als deren Ursache hin, wofür Versuche im Vakuum und in veränderter Temperatur auch positive Belege liefern.

1) W. Hallwachs, *Phya. Zeitschr.* 5. p. 489. 1904.

2) *l. c.* p. 492 u. 494.

3) *l. c.* p. 495β.

4) *l. c.* p. 496.

5) P. Lenard, *Ann. d. Phys.* 8. p. 196. 1902.

Schließlich wird die Wirkungsweise des den Hauptermüdungsvorgang bewirkenden Ozons untersucht. Auch hier läßt sich zeigen, daß es seinen ganz außerordentlich starken Einfluß weder durch Oxydation noch durch Änderung des Kontaktpotentials ausübt, sondern direkt auf die Elektrizitätsträger wirken muß. Ozontitrierungen erweisen ferner, daß die Kleinheit des Ozongehaltes der Luft keinen Einwand für die Zurückführung der Hauptermüdung auf diesen Körper bildet.

Die Feststellung, daß die Empfindlichkeitsverringering beim Eintauchen in ozonisierte Luft vom Feld unabhängig ist, führt dann zu dem Schluß, daß diese Verringerung auf Absorption der Elektronen durch von der Platte ad- und absorbiertes Ozon beruht, wodurch die Ermüdung in und außerhalb von Gefäßen auf dieselben, nur in ihrem quantitativen Erfolg verschiedenen, Grundwirkungen zurückgeführt wird. Daß die letzteren auch beim lichtelektrischen Grundphänomen stets eine entscheidende Rolle spielen müssen, vereinheitlicht die ganze Anschauung, verlangt aber auch, daß zur vollständigen Entscheidung grundlegender lichtelektrischer Fragen, z. B. nach dem Verhältnis der lichtelektrischen Empfindlichkeit der verschiedenen Metalle, das in die Körper eingedrungene Gas vorher weggeschafft werde.

**A. Ergänzungen zum Nachweis, daß die lichtelektrische Ermüdung nicht auf einem Einfluß des Lichtes oder auf Korrosion beruht.**

**a) Nichteinfluß des Lichtes (Tageslicht).**

In der früheren Arbeit waren die Ermüdungserscheinungen unter den Versuchsbedingungen, welche der Hauptmasse der lichtelektrischen Untersuchungen zugrunde gelegen haben (ultraviolette Licht, Atmosphärendruck, mittleres Potential), bearbeitet worden. Es blieb festzustellen, ob auch die Ermüdung bei solchen lichtelektrischen Erscheinungen, welche unter anderen Versuchsbedingungen verlaufen, auf gleiche Ursachen zurückzuführen seien. Insbesondere war zu ermitteln, ob bei dem durch Tageslicht hervorgebrachten Verlust (Zn) nicht etwa Lichtwirkung die Ermüdung veranlasse, weil man gerade aus

solchen Versuchen früher auf optische Ermüdungsursachen geschlossen hatte.<sup>1)</sup>

Die Versuche hierüber, welche Hr. Potzger im hiesigen Institute anstellte, waren folgendermaßen angeordnet. Von zwei nahe gleich großen Zimmern, *A* und *B*, wurde das eine verdunkelt. In dem hellen Zimmer stand die aus Elektroskop, Fernrohr und lichtelektrischer Zelle bestehende Versuchsanordnung in der Nähe des Fensters, so daß Sonnenlicht die Zelle bestrahlen konnte. In diese ließen sich zwei Zinkplatten, I und II, einsetzen und auf ihren lichtelektrischen Verlust im Tageslicht, eventuell direktem Sonnenlicht, untersuchen. Die Platten wurden vor dem Versuch abgeschirmgelt und nach lichtelektrischer Untersuchung die eine in *A*, die andere in *B* zur Ermüdung ausgelegt. Während der Ermüdungsperiode empfing die im hellen lagernde Platte direkte Sonnenstrahlung. Von Zeit zu Zeit untersuchte man beide Platten wieder lichtelektrisch. Durch Vertauschung der Platten bezüglich der Zimmer wurde die Plattenverschiedenheit und durch Ausführung eines zweiten entsprechenden Versuchspaares bei Verdunkelung von *A* und Helllassen von *B*, wo jetzt auch die Versuchsanordnung stand, der Einfluß der Zimmer eliminiert. Die Verdunkelung der Räume geschah durch Herablassen der Fensterverdunkelung. Diese Anordnung verhindert die Verwechslung eines Gefüßeinflusses mit dem der Dunkelheit. Die Konstanz des Lichtes wurde nur roh kontrolliert; da beide Platten unmittelbar hintereinander untersucht wurden, hätten sich Lichtänderungen aus den Resultaten eliminieren lassen, das Licht blieb aber offenbar sehr konstant.

Die Resultate der Hauptversuche sind in der folgenden Tab. 1 zusammengestellt; beobachtet wurde die Anzahl Skalenteile, welche das Goldblatt des Elektroskops während bestimmter Belichtungsdauer der in die Zelle zum Versuch eingesetzten Platte durchlief. Unter Ermüdung ist die Abnahme der Empfindlichkeit in Prozenten des Anfangswertes verstanden.

1) H. Buisson, Compt. rend. 130. p. 1298. 1900; Ann. de Chim. et Phys. (7) 24. p. 320—398. 1901; C. v. Schweidler, Wien. Ber. 112. IIa. p. 974. 1903.

Tabelle 1.

Ermüdungs- periode in Minuten	Belichtungs- dauer in Sekunden	Hell in A, dunkel in B. (Isolation: 10 Min., Verlust 1 p.)							
		Verluste in Skalenteilen				Ermüdung in Prozenten			
		I in A	II in B	I in B	II in A	I in A	II in B	I in B	II in A
0	15	6	5,5	6	5,5	0	0	0	0
6	"	3,5	3	3	3	42	45	51	45
24	60	5	5	4,5	4	80	78	82	78
52	"	3	2,5	3	3	88	89	88	87
135	"	1,5	1,5	1,5	2	94	94	94	91

Dunkel in A, hell in B.

0	15	6	5,5	5,5	5,5	0	0	0	0
6	"	3,5	3	4	3,5	42	45	27	38
24	60	3,5	4	4	4	86	78	78	78
52	"	3	3	2,5	2,75	88	87	89	88
135	"	1,5	1,5	1,5	1,5	94	94	94	94

Man sieht schon direkt aus der Tabelle, daß es keinen Einfluß auf die Ermüdung hat, ob diese nun im Hellen oder im Dunkeln stattfindet. Bildet man die Mittel, welche sowohl den Einfluß der Plattenbeschaffenheit als auch den des Zimmers eliminieren, so ergeben sich:

Prozente Ermüdung

Im Hellen	40	78	88	93
Im Dunkeln	44	81	88	94

Die „helle“ Platte lag am Ort der lichtelektrischen Zelle. Die Ergebnisse dieser Versuche liefern den Nachweis, daß auch bei dieser Klasse von lichtelektrischen Erscheinungen, denen mit Sonnenlicht, das Licht keine Ermüdungsursache ist. Daß die Platten im Dunkeln, wie es behauptet worden ist, an Empfindlichkeit wieder gewinnen, davon ist nichts zu bemerken und ich habe auch während meiner sonstigen, umfangreichen Versuche über die Ermüdung niemals eine Verbesserung, welche auf Dunkelheit zurückführbar gewesen wäre, erhalten.

Eine dritte Klasse von beobachteten Ermüdungserscheinungen bilden diejenigen in evakuierten Röhren.<sup>1)</sup> Von diesen

1) Vgl. z. B. P. Lenard, Ann. d. Phys. 12. p. 490. 1903; C. Ladenburg, Diss. Leipzig 1903; Ann. d. Phys. 12. p. 558. 1903.

ist ebenfalls vermutet worden, daß sie von einer Wirkung des ultravioletten Lichtes auf die Kathodenoberfläche herrühren. Die hierüber angestellten Versuche sind aber nicht einwandfrei. Einwandfreien Nachweis würde nur der Vergleich der Ermüdung bei tangentialer mit dem bei normaler Belichtung, unter Festhaltung aller übrigen Versuchsbedingungen, liefern. Da nun in evakuierten Röhren zahlreiche andere Anlässe für eine Ermüdung vorhanden sind, z. B. Ozonbildung durch das in die Röhre dringende, ultraviolette Licht<sup>1)</sup>; im Kitt des Fensters befindliche Ermüdungskörper (z. B. Holzteer, der, wie ich früher fand, starke Ermüdung liefert), welche sich bei langer Versuchsdauer im Vakuum verbreiten können; Änderung der Gasbeladung der Platten etc., so habe ich geglaubt, von der Untersuchung der Ermüdung dieser speziellen Klasse von Erscheinungen, nachdem für zwei andere das Nichtvorhandensein eines Lichteinflusses nachgewiesen ist, absehen zu können.<sup>2)</sup>

Tatsächlich könnte man eher gerade umgekehrt sagen: je lichtelektrisch wirksameres Licht verwendet wird, um so geringer fällt die Ermüdung darin aus. Dies ist aber so zu verstehen: je langwelligeres Licht zur lichtelektrischen Messung benutzt wird, um so größer ist die Ermüdung, welche man für die auf die nämliche Weise ermüdete Platte durch den Versuch erhält. So wurde schon in der früheren Arbeit gefunden<sup>3)</sup>, daß eine im Freien ermüdete Platte, welche, mit dem Kohle-

1) P. Lenard, *Ann. d. Phys.* 1. p. 503. 1900; E. Warburg u. E. Regener, *Berl. Ber.* 40. p. 1228. 1904.

2) Hr. Ladenburg findet l. c. die Ermüdung besonders stark bei Ag, gar nicht vorhanden bei Al, Hr. Kreuzler (*Ann. d. Phys.* 6. p. 404. 1901) gibt an, Ag sei das einzige Metall, dessen Empfindlichkeit während einer Versuchsreihe konstant blieb, für Al erhält er eine normale Ermüdung, die etwa 60 Proz. von der des Cu betrug. Solche Unstimmigkeiten deuten darauf hin, daß den Substanzen Ag und Al hier zugeschrieben wird, was tatsächlich durch andere, nicht aufgeklärte Ursachen bewirkt worden ist. Ausgeschlossen ist natürlich eine Verschiedenheit des Verhaltens nicht, da die einen Versuche im Vakuum, die anderen bei Volldruck stattfanden, und die Felder verschieden waren. Indes möchte man eine solche Abhängigkeit von den Versuchsbedingungen doch erst nach eingehenderen Versuchen in Erwägung ziehen.

3) l. c. p. 498.



bogenlicht untersucht, auf  $\frac{1}{3}$  der Anfangsempfindlichkeit herabgekommen war, mit der Hg-Quarzlampe untersucht etwa 25 Proz. stärkere Ermüdung zeigte. Während ferner die stärkste Zimmerermüdung, welche ich je für frisches Zn in einer halben Stunde mit Kohlebogenlicht beobachtete, die Empfindlichkeit auf  $\frac{1}{1.5}$  herabdrückte, bekam Hr. Potzger unter diesen Verhältnissen, aber mit Sonnenlicht  $\frac{1}{3.4}$  und mit trübem Himmelslicht  $\frac{1}{6}$ . Über eine mögliche mit den späteren Betrachtungen gut stimmende Erklärung siehe am Schluß dieser Arbeit (p. 512).

b) Nichteinfluß der Korrosion.

Der Umstand, daß sich bei den lichtelektrischen Zellen nach längerer Benutzung ein Abbild z. B. des Netzes, sei es direkt, oder beim Anhauchen auf der Platte zeigt, hat vielfach die Annahme veranlaßt, daß eine Strukturveränderung der Oberfläche, daß Korrosion Ursache der Ermüdung ist.<sup>1)</sup> Insbesondere hat Hr. Ladenburg die Ansicht ausgesprochen, daß der höchste Politurzustand, Hochglanz, erforderlich sei, um das Maximum der lichtelektrischen Wirkung zu ergeben.

In der früheren Arbeit habe ich auf gelegentliche Versuche hingewiesen, die diesen Annahmen widersprechen. Inzwischen sind nun weitere Versuche ausgeführt worden, welche zeigen, daß die lichtelektrische Stärke weder von der größeren oder geringeren Rauheit der Oberfläche, noch auch von der monatelangen Benutzung einer solchen abhängt, wenn man nur andere Ermüdungsursachen ausschließt.

Eine Cu-Platte wurde wiederholt auf Hochglanz unter Benutzung aller Erfahrungen, die man hinsichtlich des Polierens inzwischen gemacht hatte, mit Schmirgelpapier Hubert, qual. sup., 0000 poliert. Die Werte für die Empfindlichkeit lagen zwischen 1,92 und 2,38, bezogen auf die Eichzelleneinheit. Unmittelbar nachdem wieder der höchste erreichbare Wert (2,38) erhalten worden war, brachte man die Platte auf mittelfeines Schmirgelpapier (Hubert, qual. sup., Nr. III) und zerkratzte auf diesem reibend die Oberfläche. Sofort danach fand sich 2,32 für die Empfindlichkeit. Darauf diente ganz

1) Z. B. H. Kreusler, l. c. p. 464. Anm. 2; L. Ladenburg, P. Lenard, l. c. p. 463. Anm. 1.



grobe Schmirgelleinwand (Naxos-Union Qual. D. D. Nr. 3) zum weiteren Zerkratzen, nach welchem man 2,39 erhielt. Der Rauheitsgrad der Oberfläche hat also keinen Einfluß auf die lichtelektrische Empfindlichkeit.

Um auf etwaigen primären Einfluß von der in den Zellen nach längerem Gebrauch eintretenden, durch die erwähnten Abbildungen nachgewiesenen Oberflächenänderungen zu prüfen, mußte die Plattensubstanz ein ozonzerstörender Körper sein, sonst blieb der Einwand bestehen, daß durch das ultraviolette Licht erzeugtes Ozon die Ermüdung bewirkt habe. Überdies mußte auch die durch andere Ursachen veranlaßte Ermüdung während der Versuchsperiode möglichst gering gehalten werden. Dazu boten sich zwei Eichzellen mit CuO-Platten dar. Die folgende Tab. 2 gibt das Verhältnis ihrer Empfindlichkeiten zu den dabei angegebenen Zeitpunkten. Im Juni 1904 wurde die eine Eichzelle ( $\epsilon$ ) aus dem Licht dauernd entfernt und nur viermal im Verlauf von 16 Monaten zur Prüfung auf ihre lichtelektrische Empfindlichkeit vor die Bogenlampe an einen fixierten Ort gebracht. Während dieser ganzen langen Zeit diente die andere Eichzelle ( $\zeta$ ) bei allen meinen Versuchen als Normale und war mit Ausnahme der Ferien fast täglich in Benutzung.

Tabelle 2.

Datum	1904			1905	
	16. VI.	2. VII.	3. XI.	9. III.	20. XI.
$\zeta$	77 sec	80	87	88	102
$\epsilon/\zeta$	0,701	0,748	0,740	0,700	0,732

Man sieht hieraus, daß das Bestrahlen einer Zelle mit ultravioletttem Licht während der Versuche eines Zeitraums von 1,5 Jahren die lichtelektrische Empfindlichkeit nicht beeinflusst. Die eingetretene Ermüdung von 77 auf 102 Sek. kann also nicht der Korrosion zugeschrieben werden.

Nach den beiden vorigen Versuchen wird man dem Rauheitsgrad der Oberfläche oder deren Korrosion keinen primären Einfluß auf die lichtelektrische Ermüdung zuschreiben dürfen. Es ist indes nicht ausgeschlossen, daß es Fälle gibt, in welchen der die Netzabbildungen auf den Platten bedingende Vorgang die Ursachen der lichtelektrischen Ermüdung und damit diese selbst, aber nur sekundär, beeinflusst.

c) Zum Schluß dieses, frühere Ergebnisse ergänzenden, Teiles sei noch erwähnt, daß auch Versuche darüber angestellt wurden, ob etwa eine von außen in das Gefäß dringende unbekannte Strahlung<sup>1)</sup> Ermüdungsursache sei. Diese Versuche, bei denen die Ermüdung in einer dünnen Glashülle verglichen wurde mit derjenigen, welche bei Einsetzung dieser Hülle in mehrere, ineinander gestülpte, dickwandige Glasgefäße stattfand, hatten, analog wie die früher erwähnten Versuche mit Röntgen- und mit Radiumstrahlen, völlig negatives Ergebnis. Auch ist mir bei Anwendung von nicht allzu engen und genügend gereinigten Gefäßen nichts entgegengetreten, was auf eine Abhängigkeit der Ermüdung von der Substanz des Gefäßes (Glas, Messing, Zn, Al, Stahl) hätte schließen lassen.

**B. Die lichtelektrische Ermüdung beruht nicht auf der Bildung elektrischer Doppelschichten.**

In der früheren Arbeit war bereits bewiesen worden, daß bei der Ermüdung elektrische Einflüsse auf Bestandteile des Zwischenmediums nicht beteiligt sind. Es blieb aber noch eine andere elektrische Erklärung möglich, die seinerzeit von Hrn. Lenard hervorgehoben worden war<sup>2)</sup>, daß sich nämlich an der Oberfläche der Platte selbst Vorgänge abspielten, deren Resultat die Bildung elektrischer Doppelschichten wäre. Solche Schichten hätten eventuell die Fähigkeit, die Ermüdungserscheinungen hervorzurufen. Wenn nämlich ihre negative Seite nach außen läge, so müßten die von der Platte fortgehenden negativen Teilchen beim Durchgang durch die Schicht einen Geschwindigkeitsverlust erleiden, der unter geeigneten Umständen die Ermüdung veranlassen könnte. Da letztere dauernd bestehen bleibt, so hätte sie von einer dauernden Änderung des Kontaktpotentials begleitet sein müssen.

Zur Aufklärung dieser Verhältnisse waren daher während der Ermüdungsperiode zwischengeschaltete Bestimmungen des Kontaktpotentials der lichtelektrischen Versuchsplatten auszuführen. Sie ergaben, daß kein Parallelismus zwischen dem Verlauf der Variationen des Kontaktpotentials und den Er-

1) Vgl. die Arbeiten von Mc Clennan, Rutherford, Patterson etc. Referat darüber vgl. J. J. Thomson, Bearbeitung Marx, § 6a.

2) P. Lenard, *Ann. d. Phys.* 8. p. 196. 1902.

müdungserscheinungen besteht. Sollen diese nämlich durch Doppelschichten erklärt werden, so müssen sie von einem Negativerwerden der untersuchten Metallplatten begleitet sein. In vielen Fällen blieb aber bei starker Ermüdung das Kontaktpotential konstant oder erhöhte sich sogar (vgl. Tab. 4 und deren Erläuterung). Hieraus folgt, daß die Ermüdungserscheinungen eine allgemeine Erklärung durch Bildung von Doppelschichten nicht erhalten können.

Es bleibt aber noch die Frage offen, inwieweit Kontaktpotentialänderungen vielleicht als Nebenursache einen merkbaren Einfluß besitzen. Durch Vergleich der Ermüdung in starkem und sehr schwachem Felde ließ sich nachweisen (vgl. unter c), daß bei den von mir untersuchten Erscheinungen ein solcher Einfluß nur einen kleinen Teil der Ermüdung, etwa von der Größenordnung von 20—30 Proz., eventuell zu erklären vermag.

#### a) Versuchsanordnungen.

##### 1. Bestimmung der Kontaktpotentiale.

Zur Bestimmung der Kontaktpotentiale diente die Kompensationsmethode.<sup>1)</sup> Bei derselben wird die eine Platte eines Kondensators durch Anlegen eines Hilfspotentials auf gleiches Potential gebracht wie die ihr gegenüberstehende Platte aus anderem Metall. Die erfolgte Kompensation ergibt sich daraus, daß beim Auseinanderziehen der Platten das mit der einen, isolierten Platte verbundene, empfindliche Elektrometer von geringer Kapazität keinen Ausschlag zeigt. Die gesuchte Potentialdifferenz ist dann gleich dem angelegten Hilfspotential.

Der Apparat hierzu bestand aus einer Messinghülle mit Tür, in welcher ein mittels Quarzfuß isoliertes Tischchen die zu untersuchende Platte ( $d = 4$  cm), durch zwei Anschläge und eine kleine Feder fixiert, trug. Darüber schwebte eine größere Messingplatte von alter Oberfläche, deren axialer, zylindrischer Halter sich in einer oben am Gehäuse festen Messingröhre sicher geführt, mittels Rolle und Schnur von außen auf- und

1) F. Schulze-Berge, Diss. Berlin (Helmholtz) 1880, Wied. Ann. 12. p. 293. 1881; H. Pellat, Journ. d. Phys. 9. p. 145. 1880; Ann. de chim. et phys. (5) 24. p. 5—136. 1881. Prioritätsreklamation bezüglich der Methode vgl. Lord Kelvin, Phil. Mag. (5) 46. p. 82. 1898.

abschieben ließ. Seine tiefste Lage bestimmte ein auf das obere Rohrende treffender Anschlag. In dieser Lage wurde der oberen Platte die untere mittels dreier, von unten wirkender Stellschrauben mit Federfixierung möglichst genähert und parallel gestellt. Das übrigens isolierte Gehäuse und die obere Platte lagen am Hilfspotential, welches Akkumulator und Rheostat unter Abzweigung lieferten. Von der unteren Platte führte eine isolierte, aber erdbare Leitung zum Blättchen des Hankelschen Elektrometers, an dessen Belegungen  $\pm 280$  Volt lagen. Geerdete Hüllen von Zinkblech umgaben sowohl das Elektrometer, als auch die genannte Leitung, letztere bis dicht an das Gehäuse des Kontaktpotentialapparates, welches durch ein Streifchen Hartgummi dagegen isoliert blieb. Die Leitung passierte einen isolierten Hg-Napf, in diesen konnte die Erdleitung von oben eingeführt werden. Der dazu gebrauchte Erdschlüssel bestand aus einem vertikal in einem Röhrchen vermittelst Rolle und Schnur leicht verschiebbaren Messingstift, dessen anderes Ende ein Metallfaden mit der geerdeten Hülle der Leitung verband. Zwei Anschläge begrenzten das Spiel des Schlüssels.

Das Hankelsche Elektrometer gab bei direktem Anlegen des Potentials gewöhnlich für 0,5 Volt etwa 30, wie Doppelmillimeter in 25 cm Entfernung aussehende, Skalenteile Ausschlag.<sup>1)</sup> Beim Anlegen des Potentials an den Kontaktapparat lieferten 0,01 Volt Potentialverschiedenheit beim Auseinanderziehen der Platten bis zu etwa 5 Skt. Diese große Empfindlichkeit gelangte nicht immer zur Anwendung, da meist eine geringere für den vorliegenden Zweck vollständig ausreichte und weniger Zeitaufwand beim Einstellen der Kondensatorplatten verlangte, weil diese nicht auf den erreichbar kleinsten Abstand gebracht zu werden brauchten. Zu diesem Einstellen

1) Man kann zwar die Empfindlichkeit des Hankel noch weiter, z. B. auf das Doppelte steigern, kommt aber dann der Labilität so nahe, daß die unvermeidlichen kleinen Änderungen der Hilfsbatterie und der Temperatur das Blättchen ziemlich bald aus der Stabilität bringen und man fast alle Tage frisch einstellen muß. Dem gelegentlich auch angewendeten Wilsonschen Elektroskop fand ich, gleiche Stabilität vorausgesetzt, das Hankelsche wohl überlegen, so daß ich zu letzterem wieder zurückgriff.

diente jeweils eine der Versuchsplatte gleiche Hilfsplatte, um die erstere sofort nach dem Einsetzen ohne Zeitverlust auf ihr Kontaktpotential untersuchen zu können.

Die Isolation des Systems untere Kondensatorplatte bis Blättchen, welche lediglich durch Quarz und Schellack bewirkt war, ließ nichts zu wünschen übrig und wurde außerdem bei jedem Versuch kontrolliert.

Der Gang einer Potentialdifferenzbestimmung mit der beschriebenen Anordnung war folgender. Die Platte ließ sich mit Hilfe einer Pinzette in wenigen Sekunden an Ort bringen. Nach dem Niederlassen der oberen Platte und Aufheben der bis dahin bestehenden Erdverbindung mußte das Blättchen des Elektrometers in Ruhe bleiben. Geschah dies, so wurde die obere Platte, an welcher schon von vornherein eine mutmaßlich nahezu kompensierende Potentialdifferenz anlag, hochgezogen und der Ausschlag bestimmt. Ein zweiter Versuch nach kleiner Variation des angelegten Potentials und ein dritter, die Wiederholung des ersten, lieferten dann zusammen, neben der Kontrolle der Konstanz, die Empfindlichkeit und durch Interpolation die Kontaktpotentialdifferenz der beiden Platten.

Ein Beispiel solcher Bestimmungen möge angeführt werden (Tab. 3), unten lag eine Cu-Platte, die obere Platte war, wie erwähnt, aus altem Messing, an sie ist das Kompensationspotential der Tabelle angelegt.

Tabelle 3.

Kompensationspotential	Ausschläge	
-0,1200 Volt	23,0 - 33,2 = + 10,2	$1 p = 0,06/33,8 = 0,00178 \text{ Volt}$ $P_{\text{unten}} - P_{\text{oben}} = - 0,102 \text{ Volt}$
-0,0600	23,5 - 0,0 = - 23,5	
-0,1200	23,0 - 33,4 = + 10,4	

Die untersuchten Platten werden unmittelbar nach dem Einlegen in den Kontaktapparat etwas positiver, ähnliches beobachtete Hr. Pellat.<sup>1)</sup> Bei frisch polierten Platten beträgt der Anstieg bis etwa gegen 0,02 Volt, bei älteren wenige Tausendstel Volt. Er beruht wohl darauf, daß die Platten bis auf sehr

1) H. Pellat, Compt. rend. 94. p. 1247. 1882.

kleinen Abstand zu nähern sind, wenn größere Empfindlichkeit erzielt werden soll. Die Methode hat also einen prinzipiellen Fehler, welcher aber für die vorliegende Untersuchung keine Rolle spielte.

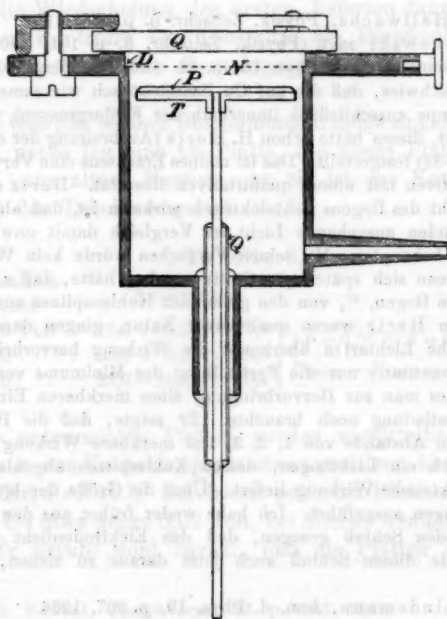
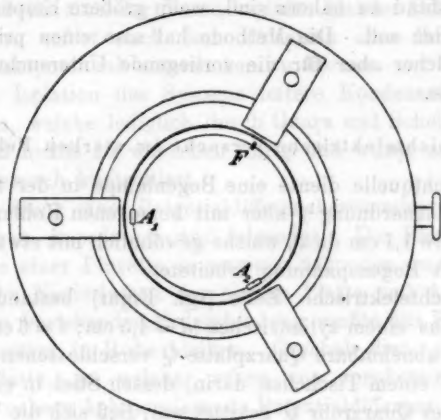
## 2. Lichtelektrische Versuche im starken Feld.

Als Lichtquelle diente eine Bogenlampe in der früher beschriebenen Anordnung<sup>1)</sup>, aber mit homogenen Kohlen<sup>2)</sup> (obere 1,6 cm untere 1,1 cm dick), welche gewöhnlich mit etwa 13 Amp. und 53 Volt Bogenspannung arbeitete.

Die lichtelektrische Zelle (vgl. Figur) bestand im allgemeinen aus einem zylindrischen ( $d = 4,5$  cm;  $l = 6$  cm), durch eine leicht abnehmbare Quarzplatte  $Q$  verschlossenen Messinggefäß. Auf einem Tischchen darin, dessen Stiel in ein ins Gefäß gekittetes Quarzrohr  $Q'$  gekittet war, ließ sich die Versuchsplatte  $P$  mit Hilfe zweier Anschläge  $A$  und einer kleinen

1) W. Hallwachs, Physik. Zeitschr. 5. p. 489. 1904. Hr. W. B. v. Czudnochowski sagt (Physik. Zeitschr. 5. p. 101. 1904) bei Erwähnung meiner Ann. d. Phys. 13. p. 38. 1904 veröffentlichten Arbeit, in der ich nachwies, daß die auf Cu lichtelektrisch wirksame Strahlung der Bogenlampe ausschließlich (innerhalb der Fehlergrenzen) vom Bogen selbst ausgeht, dieses hätte schon H. Hertz (Ausbreitung der elektrischen Kraft, p. 85—86) festgestellt. Das ist meines Erachtens eine Verwechslung eines qualitativen mit einem quantitativen Resultat. Hertz zeigte, daß auch das Licht des Bogens lichtelektrisch wirksam ist, daß aber das von den Kohlenenden ausgehende Licht im Vergleich damit unwirksam ist, hat er nicht behauptet. Mit seinen Versuchen würde kein Widerspruch entstehen, wenn sich später quantitativ ergeben hätte, daß z. B.  $\frac{1}{4}$  der Wirkung vom Bogen,  $\frac{3}{4}$  von den glühenden Kohlenspitzen ausgehe. Die Versuche von Hertz waren qualitativer Natur, gingen darauf aus zu zeigen, welche Lichtarten überhaupt die Wirkung hervorbringen, und erstrebten quantitativ nur die Feststellung des Minimums von Lichtaufwand, welches man zur Hervorbringung eines merkbaren Einflusses auf die Funkenentladung noch brauchte. Er zeigte, daß die Bogenlampe noch in einem Abstände von 1, 2, 3, 4 m merkbare Wirkung hervorruft und daß auch ein Lichtbogen, dessen Kohlenspitzen abgeblendet sind, noch lichtelektrische Wirkung liefert. Über die Größe der letzteren sind keine Messungen ausgeführt. Ich habe weder früher aus den Versuchen von Hertz den Schluß gezogen, daß das Elektrodenlicht unwirksam ist, und halte diesen Schluß auch jetzt daraus zu ziehen, für nicht möglich.

2) R. Lindemann, Ann. d. Phys. 19. p. 807. 1906.





Stellfeder  $F$  leicht und schnell fest lagern. Der Platte stand in etwa 6 mm Entfernung ein Drahtnetz  $N$  gegenüber. Der um dasselbe gelötete Messingring ruhte in einer Ausdehnung  $D$  des Gefäßes, durch Reibung darin genügend befestigt. Netz und Gefäß standen mit einer Akkumulatorenbatterie von +280 Volt in Verbindung, der Tisch mit dem Elektrometer.

Das Gefäß lag, durch ein Hartgummigestell isoliert, im Innern eines zur Erde abgeleiteten Zinkblechkastens, welcher vorn offen und zur räumlichen Fixierung der Zelle gegenüber der Bogenlampe auf einem Stativ festgekittet war. Die Beine des letzteren erhielten durch am Asphaltfußboden befestigte Rahmen ebenfalls eine feste Lagerung, während der Ort des Lichtbogens durch an den Wänden feste Schattenmarken fixiert wurde. Auf diese Weise ließen sich Orientierung und Abstand der Zelle gegenüber der Bogenlampe immer schnell wiederfinden, wenn inzwischen Gefäß und Platte in anderen Anordnungen gebraucht worden waren.

Neben der Zelle ruhte auf demselben Hartgummigestell eine zweite stets verschlossene Zelle mit alter  $\text{CuO}$ -Platte, und nur sehr langsam abnehmender Empfindlichkeit. Sie wurde von Zeit zu Zeit unter Ablesung von Strom und Spannung der Bogenlampe durch eine besondere Versuchsreihe auf normale Lichtstärke bezogen und konnte so als Eichzelle dienen, indem sie immer gleichzeitig mit der Untersuchungszelle beobachtet wurde.

Die Leitungen von den lichtelektrischen Zellen zu den Elektrometern verliefen auf Schellackstützen im Innern von rechteckigen,  $7 \times 7$  cm Weißblechröhren mit abnehmbaren Deckeln, aus welchen sich elektrostatische Hüllen für Leitungen sehr bequem zusammenbauen lassen.

Als Elektrometer dienten im Innern abgeleiteter, mit geeigneten Fenstern und einem verstellbaren Mikroskop versehener Zinkkästen isoliert aufgestellte Blattelektroskope. Der letzteren Fenster erhielten eine Drahtnetzbelegung, so daß die Blättchen vollständig metallisch eingehüllt waren. Diese Hüllen lagen an einem geeigneten von Null verschiedenen Potential (meist 180 Volt), so daß die Blättchen auch im abgeleiteten Zustand bereits divergierten, was die mikroskopische Beob-

achtung erleichtert, empfindlicher und exakter macht. Zur Beleuchtung dienten in etwa 6 m Abstand aufgestellte, mit geeigneten Blendschirmen versehene Lampen. 1 Volt Potentialänderung des Blättchens ergab etwa 2 Skalenteile Ausschlag am Okularmikrometer. Man beobachtete gewöhnlich eine lichtelektrische Potentialänderung von nur etwa 18 Volt. Dies hatte, da zwischen Netz und Platte 280 Volt lagen, den Vorteil, daß der übrigens außerordentlich geringe Isolationsverlust von der Potentialvariation des Systems Blättchen bis Platte unabhängig blieb und somit exakt zu eliminieren war. Letzteres ist nicht möglich, wenn das Blättchen eine Potentialänderung durchläuft, welche der Spannung zwischen Netz und Platte nahe gleich kommt.

Auf den Trägern der Elektroskopblättchen saßen kleine Hg-Näpfe, in welche auf dem Deckel der Zinkhüllen der Elektroskope befestigte Erdungsschlüssel von der unter 1. beschriebenen Form eintauchen konnten.

Die Beobachtungen geschahen so, daß nach Aufhebung der Erdung des Blättchens und der damit verbundenen Versuchsplatte die zu einer Potentialerhöhung um etwa 18 Volt erforderliche Zeit zur Bestimmung gelangte. Die Empfindlichkeit der Elektrometer wurde häufig durch Ermittlung des Ausschlages revidiert, welcher einer Änderung von 20 Volt des Potentials der inneren Hülle entsprach. Diese 20, jeweils nach der Kompensationsmethode mittels eines Westonelementes bestimmten Volt lieferten zehn kleine Akkumulatoren.

### 3. Lichtelektrische Versuche im schwachen Feld.

Bei diesen trat an die Stelle des einen der gerade beschriebenen Elektrometer das Hankelsche. Die Zelle bestand aus einem Blechstreifen, welcher die Versuchsplatte mittels Federklemmung festhielt und außerhalb der Auflagefläche dieser Platte lackiert war. Zwei aufgesetzte Schellackstäbchen hielten das  $20 \times 8 \text{ cm}^2$  Messingdrahtnetz in 2,7 cm Abstand von der Platte. Die Zelle ließ sich in einem großen Eisenkasten isoliert aufhängen, in welchen die Strahlen der Bogenlampe durch ein mit Drahtnetz überspanntes Fenster eintraten. Das Netz der Zelle lag an +1,1 Volt (1 Daniell), so daß ein Feld von  $1,1/2,7 = 0,41 \text{ Volt/cm}$  zustande kam, während bei den

Versuchen unter 2. ein mehr als tausendmal so starkes Feld, nämlich  $280/0,06 = 470$  Volt/cm wirkte. Die benutzte Potentialvariation betrug im allgemeinen etwa 0,1 Volt.

b) *Lichtelektrische Ermüdung und Kontaktpotential.*

Zur Ermittlung der gleichzeitig mit der Ermüdung etwa stattfindenden Kontaktpotentialänderungen wurde im allgemeinen die Versuchsplatte zuerst auf Kontaktpotential untersucht, dann lichtelektrisch im starken Feld, hierauf nochmals kontaktelektrisch. Da sich das Kontaktpotential nur sehr langsam ändert, und zwischen den einzelnen Versuchen nur kurze Zeit verstrich, indem das Einschalten der Platten in die verschiedenen Versuchsanordnungen auf genügende Schnelligkeit der Manipulationen, wie unter a) angedeutet, besonders eingerichtet war, so ergaben sich bei der geschilderten Aufeinanderfolge der Versuche richtig zusammengehörige Werte des Kontaktpotentials und der lichtelektrischen Empfindlichkeit.

Die ursprünglich frisch polierten Platten machten dann eine Ermüdungsperiode im Zimmer, im Freien, in einer Flasche etc. durch, um darauf zum zweitenmal untersucht zu werden. In der Tab. 4 finden sich eine Anzahl derartiger Versuche, welche an Cu-Platten stattfanden, zusammengestellt. Die Tabelle enthält die Dauer der Ermüdungsperiode, den Aufenthaltsort während derselben, den Anfangs- und Endwert der lichtelektrischen Empfindlichkeit und der Kontaktpotentiale gegenüber der Messingplatte des Kontaktapparates, wobei das Minuszeichen ausdrückt, daß die Versuchsplatte negativer war wie die Messingplatte, sowie endlich die Änderung des Kontaktpotentials. Letzteres ist in allen hier zusammengestellten Fällen etwas positiver geworden. Es hätte negativer werden müssen, falls es die Ursache der Ermüdung gewesen wäre. Diese ließ man bis zu erheblicher Stärke anwachsen, wie die Versuche zeigen; die Kontaktpotentialänderungen waren hier nur sehr klein.

Aus diesen Versuchen folgt, daß die Hauptursache der lichtelektrischen Ermüdung des Cu nicht in der Bildung von elektrischen Doppelschichten besteht.

Tabelle 4.

Zeit	Platte 2		Platte 0		Platte b		Platte 2		Platte 2		Platte 2
	0 <sup>b</sup>	46 <sup>b</sup>	0 <sup>b</sup>	46,5 <sup>b</sup>	0 <sup>b</sup>	21 <sup>b</sup>	0 <sup>b</sup>	24 <sup>b</sup>	0 <sup>b</sup>	144 <sup>b</sup>	0 <sup>b</sup>
Aufenthalt inzwischen	— im Zimmer		— Zimmer		Zimmer zuletzt im Fenster		Im Freien und im Zimmer		— Flasche		— Im Freien
Lichtelek- trische Stärke	100 13,2		100 12,6		100 9,4		100 9,6		100 32		100 43,4 Proz.
Kontaktpot.	-0,067 -0,003		-0,073 -0,007		-0,118 -0,115		-0,122 -0,112		-0,166 -0,076		+0,040 +0,077 Volt
Änderung desselben	— +0,06		— +0,07		— +0,003		— +0,01		— +0,09		— +0,04 Volt

Tabelle 5.

Zeit	Cu <sub>s</sub>			Cu <sub>2</sub>			Cu <sub>s</sub>			Pt				
	0 <sup>b</sup>	6,1 <sup>b</sup>	6,4 <sup>b</sup>	0 <sup>b</sup>	5,3 <sup>b</sup>	26,7 <sup>b</sup>	95,8 <sup>b</sup>	0 <sup>b</sup>	5,5 <sup>b</sup>	48 <sup>b</sup>	95,5 <sup>b</sup>	0 <sup>b</sup>	1,5 <sup>b</sup>	
Aufenthalt inzwischen	— Freien Zimmer			— Freien Zimmer			— Freien Zimmer			— Freien Flasche			— 10 <sup>m</sup> in Ozon dann 1 <sup>b</sup> Zimmer	
Lichtelek- trische Stärke	100	10,0	10,5	100	14	13	5,9	100	14	13	8,9	100	45,4 Proz.	
Kontaktpot.	-0,099 -0,173 -0,124			-0,105 -0,234 -0,097			-0,029	-0,125 -0,240 -0,118			-0,021	-0,329 -0,466 Volt		
Änderung desselben gegen den Anfangswert	— -0,074 -0,035			— -0,129 +0,008 +0,076			— -0,115 -0,007 +0,104			— -0,137 Volt				

Es verliefen indes nicht alle Versuche in derselben Richtung wie die in Tab. 4 aufgeführten. Öfters wurden die Platten beim Lagern auch negativer, und zwar im allgemeinen gerade dann, wenn die Ermüdung besonders schnell vor sich geht, nämlich meistens beim Lagern im Freien. Allerdings geschieht dies nicht regelmäßig, auch beim Lagern im Freien geht das Kontaktpotential öfters aufwärt, was mit den Witterungsverhältnissen zusammenzuhängen scheint. Auch Ozon, welches so kräftige Ermüdung bewirkt, macht die Platten negativer. Umgekehrt ist die verhältnismäßig langsame Ermüdung in Gefäßen stets mit einem positiven Werden der Platten verknüpft. Die vorstehende Tab. 5 gibt eine Übersicht über diese Verhältnisse.

Wären die Versuche der Tab. 5 allein vorhanden, so würde man vielleicht geneigt sein, die Änderung des Kontaktpotentials als eine wesentlichere Ursache der lichtelektrischen Ermüdung aufzufassen. Wenn dies nun auch die Resultate der Tab. 4 ausschließen, so bleibt mit letzteren doch vereinbar, daß die Kontaktpotentialänderungen als Nebenursache mitwirken. Bis zu welchem Betrage dies möglich ist, soll zunächst untersucht werden. Diese Untersuchung wird auch zur Beseitigung etwaiger Bedenken dienen, welche die Tab. 5 gegen den aus Tab. 4 gezogenen Schluß allenfalls erwecken könnte.

Die beobachteten Kontaktpotentialänderungen sind klein, steigen höchstens bis zu  $\frac{1}{8}$  Volt an. Liegt nun diese Potentialdifferenz  $\Delta p$  auf der Strecke, wo die aus der Platte austretenden Elektronen noch nicht absorbiert sind, so kann ein Wert  $\Delta p = \frac{1}{8}$  Volt, wie sich zeigen wird, nur eine Ermüdung von ca. 20—30 Proz. herbeiführen. Erstreckt sich aber ein erheblicher Teil von  $\Delta p$  bis in das Gebiet, wo die Elektronen bereits absorbiert sind, so würde  $\frac{1}{8}$  Volt große Ermüdung bewirken können, es müßte aber dann die Ermüdung von der Feldstärke abhängig sein, was nicht der Fall ist, wie besondere Versuche weiter unten zeigen und damit die Möglichkeit, größere Ermüdungen auf Kontaktpotentialänderungen zurückzuführen, beseitigen.

a) Die Doppelschicht werde von den Elektronen passiert (vor der Absorption durch das Gas). In diesem Falle ergeben die Messungen des Hrn. Lenard über die Anfangsgeschwindig-

keiten<sup>1)</sup> der Elektronen einen Anhalt für die Abschätzung der Größenordnung der hiermit verknüpften Ermüdung. Die „Geschwindigkeiten“ der Elektronen würden um den Potentialsprung der Doppelschicht herabgesetzt, was eine Verminderung der Zahl der ausgestrahlten Elektronen bewirkt. Falls mit sehr schwachem Felde (in meinen Versuchen 0,4 Volt/cm) gearbeitet wird, ergibt die Ablesung z. B. an der Pt-Kurve des Hrn. Lenard (für  $\frac{1}{8}$  V.) eine Verminderung der ausgestrahlten Quanten um 16 Proz. Im starken Felde (bei meinen Versuchen 470 Volt/cm) kommen, wie aus derselben Kurve hervorgeht, etwa 20 Proz. mehr Elektronen heraus; diese besitzen aber nur sehr geringe „äußere Geschwindigkeiten“, so daß sie durch  $\frac{1}{8}$  Volt entgegenwirkenden Kontaktpotentialsprung nahezu sämtlich wieder zur Rückentladung gebracht werden. Das gleiche geschieht mit denjenigen Elektronen, deren äußere Geschwindigkeit  $\frac{1}{8}$  Volt nicht übersteigt, das sind etwa 13 Proz. der gesamten ausgestrahlten. Im ganzen könnte daher äußersten Falles eine Ermüdung bis zu etwa 33 Proz. auftreten. Die der Kontaktpotentialänderung entsprechende Doppelschicht vermag also nur Ermüdungen um 20—33 Proz., d. h. auf 80—70 Proz. des Anfangswertes unter diesen Umständen höchstens zu veranlassen, d. h. nur einen kleinen Teil des tatsächlich beobachteten. Die Ermüdung müßte nach dem vorstehenden im starken Felde etwas größer sein wie im schwachen, während die weiter unten mitzuteilenden Versuche ihre Unabhängigkeit vom Felde ergeben. Indes ist die Genauigkeit nicht groß genug, um hieraus einen Widerspruch konstruieren zu können, auch handelt es sich bei der angestellten Betrachtung nur um eine Abschätzung\* der Größenordnung nach. Das Ergebnis ist daher, daß ein kleiner Teil der Ermüdung, etwa 20—30 Proz., eventuell durch Änderung des Kontaktpotentials bewirkt sein wird, daß diese Änderung aber auf dem unter  $\alpha$ ) betrachteten Weg die Hauptursache der lichtelektrischen Ermüdung nicht zu liefern vermag.

$\beta$ ) Zweite Möglichkeit: ein merklicher Betrag  $q$  der Potentialänderung der Doppelschicht reicht bis in das Gebiet, in dem die

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 8. p. 149—198. 1902, insbesondere Taf. I, Fig. 2.

*Elektronen bereits absorbiert sind.* In diesem Falle vermöchten sehr kleine  $q$  starke Ermüdungen hervorzurufen: bei Feld Null würden schon 0,01 Volt genügen können, um jedes weitere Fortgehen der Ionen aufzuhalten.<sup>1)</sup> Ist nun die Dicke der Doppelschicht nicht allzu klein, so müßte das wirkende Feld einen mit seiner Stärke steigenden Betrag von  $q$  kompensieren, was aber die hier folgenden Versuche ausschließen, da sie gleiche Ermüdung für Feld 0,4 und 470 ergeben. Diese Unabhängigkeit vom Feld ließe sich eventuell auch noch darauf zurückführen, daß die Dicke des wirksamen Teils der Doppelschicht zu gering wäre, um eine merkliche Kompensation von  $q$  auch bei dem stärkeren Feld (470) zu ermöglichen. Dann könnte aber  $q$  nur von der Größenordnung 0,01 Volt sein, da sonst die ganze lichtelektrische Strömung (analog wie im Feld Null) aufgehoben würde, was durchaus nicht der Fall ist. Schwankungen der Potentialvariation von nur 0,01 Volt müßten dann den größten Einfluß auf die Ermüdung ausüben. Dies trifft aber nach unseren früheren Versuchen nicht zu, da selbst Potentialschwankungen von der Größenordnung  $\frac{1}{10}$  Volt nur sekundären Einfluß auf die Ermüdung haben. Die Annahme  $\beta$  ist daher nicht in Erwägung zu ziehen.

Zum Nachweis der erwähnten Unabhängigkeit der Ermüdung vom Feld kamen folgende Versuche zur Ausführung. Zunächst gelangten zwei frisch polierte Cu-Platten im starken Feld (470) und in einem schwachen Feld zur Untersuchung, welches durch Herabsetzung der Potentialdifferenz der Zelle von 280 auf 10 Volt erzielt wurde. Im starken Felde ließ man das Potential um 19 Volt, im schwachen um 8,5 Volt herabsinken. Wechselweise Beobachtung eliminierte die Ermüdung während der Versuchsdauer. Die Platten kamen dann eine gute halbe Stunde ins Freie, um etwa auf die Hälfte zu ermüden, worauf abermals ihre Untersuchung stattfand. Um ein Beispiel für die Beurteilung der Genauigkeit zu geben, mögen diese Versuche im einzelnen mitgeteilt werden.

1) Dies folgt aus der Annahme, daß die gebildeten Ionen aus je einem Elektron ( $e = 6,6 \times 10^{-19}$  st. E.) und einem Gasmolekel (kinetische Energie =  $23,5 \times 10^{-15}$  Erg) bestehen.



Tabelle 6.

$V$  = Potentialdifferenz an der Zelle;  $Cu_I$ ,  $Cu_{II}$  „Eichzelle“ bedeuten die bei diesen Platten zum Durchlaufen von 19 bez. 8,5 Volt gebrauchten Zeiten.

$V$	$t$	$Cu_I$ sec	Eichzelle	$t$	$Cu_{II}$ sec	Eichzelle
280	11 <sup>h</sup> 44 <sup>m</sup>	12,3; 12,2; 12,1	62,8	12 <sup>h</sup> 5 <sup>m</sup>	13,1; 13,1; 12,9	63,3
10	51	109	62,0	9	126	62,9
280	54	13,0; 13,0; 12,9	62,8	14	14,2; 14,2; 14,1	64,1
10	12 <sup>h</sup> 35 <sup>m</sup>	281	65,2; 64,5	1 <sup>h</sup> 8 <sup>m</sup>	265	62,0; 62,7
280	40	26,0; 26,1	64,6	14	29,5; 29,3	63,0
10	44	280	64,3; 62,9	16	263	62,7; 62,4

Aus diesen Versuchen ergeben sich für  $Cu_I$  im starken Feld eine Ermüdung auf 49,9 Proz., im schwachen auf 48,9 Proz., für  $Cu_{II}$  die entsprechenden Zahlen 45,8 und 47,4. Innerhalb der Versuchsfehler sind also die Ermüdungen in beiden Feldern, deren Stärke sich wie 28:1 verhalten, einander gleich. Die Kontaktpotentiale wurden hier, da die Versuche wesentlich zur Orientierung dienen sollten, nicht gemessen. Wenn auch aus anderen Versuchen, welche in jenen Tagen (August) stattfanden, folgt, daß das Kontaktpotential etwa um 0,1 Volt heruntergegangen sein muß, so waren doch Versuche zuzufügen, bei denen jenes gleichzeitig zur Messung gelangte. Da es zur Zeit derselben (im März) nicht gelang, das Kontaktpotential durch Lagern im Freien herunterzuschieben, kam Ozon zur Anwendung, ferner eine Platinplatte sowie die unter B. a. 3. beschriebene Anordnung für das schwache Feld, welches hier noch nicht ein Tausendstel des starken betrug. Die Platinplatte zeigte, frisch ausgeglüht, -0,36 Volt gegenüber der alten Messingplatte, die lichtelektrische Stärke (reziproke Entladungszeit, bezogen auf die der Eichzelle) fand sich im starken Feld zu 0,78, im schwachen zu 0,71 (die Zahlen beziehen sich auf verschiedene Einheiten, sind nicht vergleichbar). Nach 10 Min. Verweilen in Ozon und darauffolgendem dreiviertelstündigem freien Liegen auf dem Tische (zur Elimination der raschen Empfindlichkeitsänderung unmittelbar nach dem Herausnehmen aus dem Ozon) ergab sich die Kontaktpotentialdifferenz

zu  $-0,466$ , die lichtelektrische Stärke zu  $0,352$  im starken und  $0,288$  im schwachen Feld. Bei einer Potentialerniedrigung um  $0,137$  Volt hatte also die Empfindlichkeit der Platte im starken Feld um  $54-55$ , im schwachen um  $59-60$  Proz. abgenommen. Die Ermüdung ist also in den beiden Feldern, die sich etwa wie  $1000:1$  verhalten, wesentlich gleich. Der kleine Unterschied der Zahlen ist ohne Bedeutung für die Gültigkeit der oben gezogenen Schlüsse und unterhalb der Fehlergrenzen. Die Genauigkeit ist ja nicht sehr groß, da die Versuchsreihe sich wegen des Manipulierens mit drei ziemlich umfangreichen und zum Teil zarten Versuchsanordnungen recht schwierig gestaltete, um so mehr als wegen der fortwährenden Variation sowohl der frischen als auch der mit Ozon beladenen Platten schnell und unter steter Rückprüfung zu arbeiten war. Erst beim vierten Ansetzen gelang es, die Versuchsreihe ohne Zeitverlust glatt durchzuführen. Einer dieser Ansätze war zwar auch ohne Zwischenfall verlaufen, aber die verwendete Platte (Cu) war in der Ermüdungsperiode nicht negativer, sondern positiver geworden, und zwar um  $0,04$  Volt. Die trotzdem zu Ende geführte Versuchsreihe ergab im starken Feld eine Ermüdung um  $63$ , im schwachen um  $59$  Proz. Die Unabhängigkeit der letzteren vom Feld bestätigt sich also auch durch diese Versuchsreihe, andere gelegentliche Beobachtungen lieferten regelmäßig dasselbe Resultat.

Die unter  $\alpha$ ) und  $\beta$ ) angestellten Betrachtungen und Versuche liefern den Nachweis für den oben in der Einleitung von B. bereits vorangestellten Schluß, daß die **Hauptursache** der lichtelektrischen Ermüdung nicht in der Ausbildung oder Änderung elektrischer Doppelschichten besteht, daß diese aber als Nebenursachen, welche schwache Ermüdungen um höchstens  $20-30$  Proz. veranlassen können, mitwirken werden.

Letzteres müßte in solchen Fällen, wo die Hauptermüdungsursache nur wenig kräftig ist, deutlicher hervortreten, eine Folgerung, die indes nur einseitig geprüft werden kann, da in diesen Fällen die Platten regelmäßig positiver werden. Dies geschieht in ganz reinen Gefäßen und bei frischem CuO. Die aus der Platte kommenden Elektronen passieren daher eine Schicht, in welcher sie eine Geschwindigkeitsvermehrung erhalten. Hierdurch wird ein etwas größerer Bruchteil von

ihnen in das Bereich des sie weitertragenden Hauptfeldes kommen, d. h. die lichtelektrische Empfindlichkeit sollte sich etwas vergrößern.

Dies ist nun tatsächlich der Fall, wie die folgenden Versuche beweisen. Bei denselben kamen in geschlossenen Messingzellen von der p. 471 geschilderten Art Cu-, Pt- und CuO-Platten zur Untersuchung. Die Zellen waren vor dem Versuch längere Zeit geschlossen gewesen (vgl. weiter unten p. 487). Die Cu-Platten des ersten und zweiten Versuches erhielten unmittelbar vor dem Gebrauch frische Politur, beim dritten Versuche ließ man die Platte zunächst etwas ermüden; die Pt-Platte war frisch ausgeglüht (vgl. darüber p. 491—492), die CuO-Platte direkt vor dem Versuche frisch hergestellt.

Die folgende Tab. 7 ergibt bei den drei beobachteten Körpern kleine Anstiege der Empfindlichkeit. Gleichzeitige Messungen der Kontaktpotentiale fanden nur bei CuO statt, aber auch Cu und Pt liefern beim Einbringen in Flaschen ein Ansteigen des Kontaktpotentials, wie sich immer wieder ergab, so z. B. auch in Tab. 4 und 5, indes nur um einige hundertstel Volt. Beim CuO beträgt der Anstieg zunächst volle 0,2 Volt. Da hierbei das Wachsen der lichtelektrischen Empfindlichkeit nicht größer ausfällt, wie bei den Versuchen mit Cu und Pt, so kann möglicherweise die hier gegebene Erklärung für den beobachteten Empfindlichkeitsanstieg nicht ganz ausreichen. Indes sind mir weitere Umstände, welche zur Erklärung dienen könnten, nicht begegnet.

Faßt man die Ergebnisse des vorstehenden Kapitels B. über den etwaigen Einfluß der Kontaktpotentialänderungen mit den Resultaten der früheren Arbeit und denen des Kapitels A. zusammen, so findet sich, daß sämtliche bisher für die Erklärung der lichtelektrischen Ermüdung gemachten Annahmen nicht zutreffen: weder die Korrosion der Oberfläche, noch das Licht oder andere von außen kommende Strahlungen, oder die Oxydation, noch auch elektrische Ursachen, sei es, daß sie in Einflüssen auf das Zwischenmedium oder in der Ausbildung oder Änderung von elektrischen Doppelschichten bestehen, liefern die Hauptursache der lichtelektrischen Ermüdung.

Tabelle 7.<sup>1)</sup>

Verlauf der lichtelektrischen Empfindlichkeit in Gefäßen, welche längere Zeit geschlossen waren.

Zeit in Stunden	Lichtelektrische Empfindlichkeit		Zeit in Stunden	Lichtelektrische Empfindlichkeit	
	relativ zur Eichzelle	in Prozenten		relativ zur Eichzelle	in Prozenten
Cu <sub>1</sub>			Pt		
0	1,59	100	0	1,96	100
0,03	1,67	105	0,95	1,53	118
0,65	1,76	111	2,0	1,51	112
17,3	1,55	98	4,0	1,45	107
24,6	1,40	88	6,0	1,47	108
72,5	1,19	75	13,0	1,46	108
Cu <sub>2</sub>			20	1,44	107
0	1,47	100	36	1,40	103
1,0	1,56	106	53	1,31	97
4,25	1,50	102	69	1,26	93
9,92	1,37	93	111	1,12	83
24,2	1,26	85	CuO		
72,5	0,95	65	CuO/Masg.		
Cu <sub>3</sub> mit Vorermüdung			0	—	—
0	1,61	156	0,15	0,885	100
2,6	0,98	95	0,2	—	—
Platte ins Gefäß			4,15	—	—
2,7	1,03	100	4,28	0,998	113
2,75	1,07	104	4,4	—	—
4,35	1,11	108	29,4	—	—
6,63	1,15	112	29,5	0,948	107
24,1	1,12	109			
74,4	0,92	89			
168	0,71	69			

1) Die Zahlen der verschiedenen Versuchsreihen beziehen sich auf verschiedene Einheiten, sind nicht vergleichbar.

Die weitere Untersuchung verfolgte nun den Weg, zuerst der Ursache der auch in reinen (ozonfreien) Gefäßen noch vorhandenen, sehr langsamen Ermüdung nachzuforschen und dadurch vielleicht Stützen zu gewinnen für die Aufklärung der Ermüdungswirkung des Ozons, welche außerhalb von Gefäßen die Hauptrolle spielt, wie in der früheren Arbeit gezeigt wurde.

### C. Ermüdung in Gefäßen.

Innerhalb eines Gefäßes ist die Ermüdung sehr stark verringert, wie früher gezeigt wurde, aber eine sehr viel langsamere verlaufende Ermüdung bleibt bestehen. Diese kann durch einen im Gefäß vorhandenen Rest des außen wirksamen Agens (Ozon) bedingt sein oder die Folge einer anderen, außen überdeckten, Ermüdungsursache bilden.

Um diese Frage aufzuklären, gelangte zunächst der Verlauf der Ermüdung in Gefäßen zu ausgedehnter Untersuchung. Als solche dienten zylindrische Glasgefäße von etwa 4 cm Durchmesser und 20 cm Länge, deren Verschlußhauben Schliffstücke bildeten. Nach Reinigung mit Sodalösung und destilliertem Wasser wurden sie durch einen Luftstrom getrocknet, welcher vor seinem Eintritt in das Gefäß eine meterlange Watteröhre durchlief. Jede Spur Gummi blieb bei den hierbei erforderlichen Verbindungen ausgeschlossen, wie es nach früherem<sup>1)</sup> unbedingt erforderlich ist. Cu-Platten kamen dann nach frischer Politur und Bestimmung der lichtelektrischen Empfindlichkeit bei möglichst kurzer Lüftung der Verschlußhauben in die Flaschen, welche darauf an einem ruhigen Orte störungsfrei lagerten.

Nach dem Ablauf der Ermüdungsperiode gelangten die Cu-Platten ohne Zeitverlust in der lichtelektrischen Zelle zu neuer Untersuchung. Bei der Länge der erforderlichen Ermüdungsperioden konnte man sich nicht mit einer einzigen Flasche begnügen, sondern mußte eine ganze Anzahl gleicher und jedesmal zu Anfang sowohl als auch zu Beginn eines neuen Versuches gleich behandelter Flaschen verwenden. Die zur lichtelektrischen Bestimmung dienende Eichzelle wurde von Zeit zu Zeit durch „Normalversuche“, d. h. unter Ein-

1) W. Hallwachs, l. c. p. 493.

regulierung des Lichtes auf eine festgesetzte Spannung und Stromstärke auf bestimmte Lichtstärke bezogen, wobei sich zurzeit eine Genauigkeit von etwa 2—3 Proz. bei Ausführung von je drei Normalversuchen erreichen läßt. Jeder Normalversuch bestand aus fünf Einzelversuchen, deren jeder zehn Ablesungen von Strom und Spannung und eine Zeitablesung der Zelle umfaßte. Zu Beginn und am Schluß jedes Normalversuches wurde die Kohlenlänge ermittelt, um die Elektroden-spannung aus der gemessenen Spannung zwischen den Kohlenhaltern finden zu können. Außerdem fand noch eine Empfindlichkeitsbestimmung des Elektrometers statt, sowie eine Kontrolle der Uhr und dergleichen mehr.

Außer Cu kam auch Pt zur Untersuchung, welches aber ständig in einer Zelle der p. 471 beschriebenen Art verweilte. Ferner liefert die Eichzelle selbst, bei welcher eine CuO-Platte benutzt war, den Verlauf der Ermüdung bei dieser Substanz für eine über  $3\frac{1}{2}$  Jahre ausgedehnte Periode. Die CuO-Zelle hatte allerdings eine aufgekittete Quarzplatte, aber durch Vergleich der Ermüdung von Cu in einem gleichen Gefaße mit der in den oben erwähnten Flaschen ergab sich, daß der verwendete Kitt (Wachs, Kolophonium, Asphalt)<sup>1)</sup> keine Störung veranlaßt. Auch der Umstand, daß die Eichzelle sehr häufig dem Lichte ausgesetzt war, ist nach p. 466 ohne Bedenken.

Tabelle 8.

Zeit in Wochen	Empfind- lichkeit Cu	Zeit in Monaten	Empfindlichkeit		
			Cu	CuO	Pt
0	100	0	100	100	100
1	52	3	31	64	94
2	54	6	33	60	82
3	45	9	31	54	63
4	43	12	28	44	57 <sup>2)</sup>
14	31	18	—	38	—
		24	—	32	50
		30	—	33	—
		42	—	32	—

1) Asphaltzusatz zum gebräuchlichen Wachs-Kolophonium-Kitt verhindert allmähliches Abspringen von Glas, Quarz etc., selbst dann, wenn die Kittstelle mit z. B. Wasser in langer und wiederholter Berührung ist, wie z. B. beim Doppeltrogrefraktometer.

2) Dieser Wert gilt für 10,3 Monate.

Die vorstehende Tab. 8 enthält eine Zusammenstellung der Versuche. Sie gibt die lichtelektrische Stärke relativ zum Anfangswert, diesen gleich 100 gesetzt. In der ersten Kolumne stehen die Resultate mit Cu für Ermüdungsperioden bis zu 14 Wochen, in den anderen Kolumnen die Ergebnisse mit allen drei untersuchten Substanzen für monatelange Perioden.

Die Tabelle zeigt, daß Cu bereits nach einer Woche auf die Hälfte ermüdet ist, in drei Monaten auf ein knappes Drittel herabgeht und diesen Wert auf die Dauer im wesentlichen beibehält. Die kleinen Schwankungen in den einzelnen Werten sind darin begründet, daß sich letztere auf verschiedene Platten und Flaschen beziehen, daß keine Temperaturkorrektur eingeführt ist, und die Richtigkeit der Lichtstärke nur auf 2—3 Proz. garantiert werden kann. Der Verlauf der Werte bei Cu macht es wahrscheinlich, daß es sich hier nicht um die Wirkung eines Restes von Ozon handelt, dieses kann auch mit Rücksicht auf die Reinigungsart der Flaschen, den Durchgang durch ein meterlanges Watterohr, kaum noch zugegen sein und würde überdies in den Flaschen schneller zerstört, so daß eine durch dasselbe bewirkte Ermüdung viel rascher zu Ende käme, als es die Versuchsreihe zeigt. Es muß also noch eine andere Ermüdungsursache vorhanden sein.

Zur Sicherung dieses Schlusses gelangten noch einige Versuche zur Ausführung, bei welchen die gereinigten Flaschen vor dem Einlegen der Platten in einem Ofen auf  $300^{\circ}$  erhitzt wurden und die bei der darauffolgenden Abkühlung eindringende Luft durch eine, an die Flasche angeblasene, in einem anderen, dicht danebenstehenden Ofen ebenfalls auf  $300^{\circ}$  erhitzte Glasspirale hindurchstreichen mußte. Nach der Abkühlung waren zwar die Gefäße zur Einbringung der Platten noch einen Moment zu öffnen, aber durch Vermeiden jeglicher Erwärmung der Gefäße bei dieser Manipulation und durch die Betrachtung des eventuellen Einströmens mit Hilfe von Tabaksrauch an einem gleichen Gefäß, versicherte man sich, daß der Luftaustausch sehr gering blieb, wohl sicher unterhalb  $2\text{ cm}^3$ , während das Gefäß  $500\text{ cm}^3$  faßte.

Das Ergebnis dieser Versuche war nun, daß nach einem,



sieben und 48 Tagen die Empfindlichkeit 69, 51 und 31 Proz. der ursprünglichen betrug. Mit Sodalösung und Luftstrom durch Watte, wie oben angegeben, gereinigte Flaschen ergaben ganz übereinstimmend nach einem und sieben Tagen 69 und 52 Proz., während der für 7 Wochen erhaltene Wert, wie aus Tab. 8 ersichtlich, ebenfalls genügend übereinstimmt.

Der obige Schluß, daß in der Flasche eine andere Ermüdungsursache wirken müsse, daß es eine ozonfreie Ermüdung gibt, ist damit gesichert. Dies weisen übereinstimmend auch die in Tab. 8 aufgeführten Versuche mit CuO und Pt nach, auf welche Ozon, wie in der früheren Arbeit nachgewiesen, nur vorübergehend Einfluß hat, sie sind ja auch Des-ozonisatoren.

Wenn aus den Gefäßen nicht wie in den vorhergehenden Versuchen das Ozon durch geeignete Reinigung oder Erhitzen beseitigt ist, müßte die Ermüdung stärker sein. Dies ist auch der Fall. Läßt man z. B. eines der p. 471 beschriebenen Gefäße längere Zeit verschlossen, währenddessen allenfalls ursprünglich an den Wänden und im Gefäßraum vorhandenes Ozon zerstört werden muß, und öffnet dasselbe dann, um eine frisch polierte Platte einzuschieben, nur möglichst kurz, so ist die lichtelektrische Ermüdung dieser Platte erheblich geringer, wie wenn das Gefäß längere Zeit offen auf dem Tisch gelegen hat. Ersteres war der Fall bei den Versuchsreihen der Tab. 7 mit Cu. Man vergleiche mit diesen die beiden folgenden Versuche (Tab. 9), welche mit ganz denselben Gefäßen und Platten ausgeführt wurden, nachdem erstere 10 bez. 7 Tage bei entferntem Quarzdeckel offen, mit der Öffnungsebene vertikal auf einem Tisch an einem luftruhigen Ort gelegen hatten. Die lichtelektrische Empfindlichkeit ist wieder in Prozenten ihres Anfangswertes gegeben.

Der Vergleich mit den Werten der Tab. 7 ergibt, daß sich nun eine andere Ermüdungsursache, vermutlich Ozon, überlagert, welche erstens bewirkt, daß die Empfindlichkeit sofort abnimmt, ohne erst über ein Maximum zu gehen, und daß zweitens die Ermüdung bis zu viel stärkerem Grade fortschreitet. Eine Reihe ähnlicher Versuche hatten das gleiche Ergebnis.

Tabelle 9.

Zeit in Stunden	Cu <sub>1</sub>	Zeit in Stunden	Cu <sub>2</sub>
0	100	0	100
1,0	98	1,2	92
2,4	91	—	—
4,1	88	5,0	81
7,0	75	—	—
24	55	24	64
3 × 24	37	3 × 24	46
6    "	30	6    "	37
12   "	25	12   "	28
19   "	21	28   "	23
40   "	16	—	—

Es ist nun die Frage zu erörtern, worin die Ursache derjenigen Ermüdung, welche sich nach Beseitigung des Ozons noch einstellt, besteht. Nachdem durch die seitherigen Versuche eine ganze Reihe möglicher Ursachen ausgeschlossen ist, bleibt dafür kaum noch etwas anderes übrig als die Gas-Ad- und Absorption der Platte. Daß diese auf die Stärke des lichtelektrischen Stromes einen ausschlaggebenden Einfluß haben muß, folgt aus der außerordentlichen Größe des Absorptionsvermögens der Gase für langsame Elektronen: aus den Zahlen des Hrn. Lenard<sup>1)</sup> ergibt sich für 6 Volt-Strahlen in Gasen von Atmosphärendruck ein Absorptionskoeffizient von 20000 bis 30000, welcher wegen der Kondensation im Oberflächengebiet dort zu mächtigen Werten anwachsen muß. Da ferner die Wirkung des ultravioletten Lichtes ziemlich tief in die Platten eindringt, nämlich, wie Hr. Ladenburg<sup>2)</sup> fand, bis zu nahezu  $9 \times 10^{-4}$  mm, so kommen für die Absorption der Elektronen bis in diese Tiefe eingedrungene Gasmengen in Betracht. Die nach dem frischen Polieren wieder einsetzende Gas-Ad- und Absorption wird Zeit zu ihrer vollständigen Ausbildung brauchen, insbesondere wird in die tieferen Schichten des Metalles hinein der Absorptionsprozeß nur langsam fort-

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 12. p. 782. 1903.

2) E. Ladenburg, Diss. p. 27. O. Leiner, Leipzig 1903; Ann. d. Phys. 12. p. 577. 1903.

schreiten. Mit ihm ist allmählich wachsende Absorption der Elektronen verknüpft, der die lichtelektrische Ermüdung entspricht. Die Langsamkeit des Vorwärtsdringens vom Gas in die tieferen Schichten des Metalles wird die lange Dauer des Ermüdungsprozesses erklären.

Dieser, wie mir scheint, ziemlich einleuchtenden Betrachtungsweise stehen nun Angaben in der Literatur entgegen, die ihre Annahme bei meinen Versuchen verzögerten. So findet sich z. B. die Angabe, daß im Wasserstoff keine Ermüdung stattfindet.<sup>1)</sup> Wäre dies der Fall, so könnte die Gasabsorption keine Ermüdungsursache sein, denn auch der Wasserstoff hat nach Lenard für so langsame Strahlen ein sehr großes, das der Luft übersteigendes Absorptionsvermögen. Ich habe daher Cu und Pt in Wasserstoff auf ihre eventuelle Ermüdung untersucht, mit dem Ergebnis, daß beide auch in diesem Falle Ermüdung zeigen und diese sich ganz analog verhält wie diejenige in Luft, nur für Pt etwas stärker, für Cu etwas schwächer ist.

Bei den diesbezüglichen Vorversuchen hatte man die Quarzverschlußplatte, nach dem Einbringen der Cu- oder Pt-Platte in das Gefäß, aufgekittet. Um den Zweifeln zu begegnen, welche in der Richtung bestanden, daß das Aufkitten die Ermüdung beeinflussen könne, kam bei den schließlichen Versuchen eine im allgemeinen entsprechend wie die p. 471 beschriebene, gestaltete Gefäßzelle zur Anwendung. Indes bestand sie aus einem Stahlschliff mit Hg-Dichtung, ließ sich daher in zwei Teile zerlegen, und gestattete so, die Quarzplatte vor dem Einbringen der Versuchsplatte aufzukitten und kalt werden zu lassen. Der im folgenden angegebene Versuch mit Pt ist mit diesem Gefäß ausgeführt, Cu exponierte man darin nur kürzere Zeit, und da sich während derselben das nämliche ergab wie bei der auf 31 Tage ausgedehnten früheren Versuchsreihe, so ist deren Ergebnis hier aufgeführt.

Der Wasserstoff wurde elektrolytisch entwickelt, ging durch Röhren mit KOH, mit  $\text{CaCl}_2$ ,  $\text{P}_2\text{O}_5$ , reduziertem Cu und schließlich durch ein in fester  $\text{CO}_2$  liegendes  $\text{CaCl}_2$ -Rohr.

1) J. J. Thomson, *Conduction of el. through gases* p. 224. 1903. Art. 120. Marx' Übersetzung p. 229.

Alle Verbindungen waren durch Verschmelzen hergestellt. Die schließlich an das  $\text{CaCl}_2$ -Rohr angeschmolzene Glasröhre führte zu einem Hg-gedichteten Doppelhahn, der die Verbindung mit der Luftpumpe oder mit einem Rohr herstellte, an welches das in die Gefäßzelle eingekittete Zuführungsrohr angeschmolzen war. Nach mehrfacher Evakuierung und darauf folgender H-Füllung der Gefäßzelle blieb diese, um die Wände mit Wasserstoff zu sättigen, längere Zeit, etwa 2 Tage, mit H gefüllt stehen. Sodann erfolgte, nach möglichst rascher Öffnung des Gefäßes, Einführung der Versuchsplatte und Wiederschließen des Gefäßes, dreimalige Evakuierung und Wiederfüllung mit Wasserstoff, jedesmal bis auf Atmosphärendruck. Möglichst umgehend fand dann die erste lichtelektrische Beobachtung statt, etwa 1 Stunde nach dem Ausglühen<sup>1)</sup> bez. Polieren der Versuchsplatte.

In der folgenden Tab. 10 sind die Ergebnisse, welche nach einigen, im wesentlichen übereinstimmenden Vorversuchen erhalten wurden, angegeben, die lichtelektrische Stärke wieder in Prozenten des Anfangswertes.

Tabelle 10.  
Ermüdung in Wasserstoff.

Zeit in Tagen	Cu	Zeit in Tagen	Pt
0	100	—	100
0,03	103	—	—
0,07	104	—	—
0,17	105	—	—
0,30	105	—	—
0,91	103	0,82	77
2,05	100	2,83	72
3,2	92	4,03	67
7,3	88	7,01	65
13,2	72	14,0	65
19,1	65	25,0	59
31,2	55	56,0	57

Aus diesen Versuchen geht hervor, daß auch in H Ermüdung stattfindet, so daß kein Hindernis mehr im Wege steht, in

1) Vgl. weiter unten p. 491—492.

der Gefäßermüdung eine Folgewirkung der Gasabsorption zu sehen.<sup>1)</sup>

Nachdem dies festgestellt war, suchte man nun positive Nachweise für die Wirkung von Gasabsorption zu finden. Vor dem näheren Eingehen hierauf möge noch bemerkt werden, daß die lichtelektrische Stärke des Cu und Pt in Wasserstoff sich kleiner ergab wie in Luft, und zwar für Pt etwa 30 Proz., für Cu etwa 50 Proz. Indes erfordert die Feststellung der absoluten lichtelektrischen Stärke eines Körpers in einem Gas ein sehr umfangreiches Versuchsmaterial, da sie von so vielen Umständen abhängig ist. Mit H kamen nur etwa drei vollständigere Versuche zur Ausführung, so daß die angegebenen Zahlen nur grobe Orientierungen geben. Daß die Empfindlichkeit einer reinen Platte in Luft größer ist wie in *reinem* H, stimmt mit den Versuchen des Hrn. Wulf<sup>2)</sup> überein, in *nicht* ganz reinem H hatte derselbe 10 mal so große Empfindlichkeit wie in Luft erhalten, wieder ein Beispiel, wie vorsichtig man in diesem Gebiet sein muß. Auch Hr. W. M. Varley fand<sup>3)</sup> die Empfindlichkeit in H etwas geringer wie in Luft (vgl. auch am Schluß dieser Arbeit p. 513).

Ferner möge hier noch erwähnt werden, daß, während bei Cu die Oberfläche ihre Erneuerung immer durch Hochglanzpolieren erhielt, die Pt-Platten zu diesem Zwecke ausgeglüht wurden, und zwar im Bunsenbrenner, wodurch sich, wie frühere zahlreiche Versuche gezeigt hatten, recht gute Konstanz der lichtelektrischen Stärke ergibt, welche die mit Hochglanzpolieren erreichbare übersteigt. Diese Konstanz war dahin gedeutet worden, daß Ausglühen das Ermüdungsagens

1) Für die Erklärung der oben erwähnten Angabe von Hrn. J. J. Thomson finden sich verschiedene Möglichkeiten, z. B. die, daß bei den ihr zugrunde liegenden Versuchen (dieselben sind leider nicht zitiert) die Ermüdung in einem H enthaltenden Gefäß mit der in Luft *außerhalb* eines Gefäßes, statt *in* einem solchen verglichen, und dann der Gefäßeinfluß als Wirkung des H gedeutet wurde; oder die Bemerkung bezieht sich auf verdünnten H, und das Ausbleiben der Ermüdung ist der Verdünnung, nicht dem H zuzuschreiben (vgl. Tab. 12 und Erläuterungen) u. a. m.

2) Th. Wulf, Ann. d. Phys. 9. p. 958—962. 1902.

3) W. M. Varley, Phil. Trans. London 202. p. 439. 1904.

beseitigt, ausgeglühte Platten also als lichtelektrisch rein zu betrachten sind.

Nun hat Hr. Nothdurft<sup>1)</sup> in einer hübschen Arbeit gelegentlich darauf hingewiesen, daß beim Ausglühen einer Pt-Platte in der Bunsenflamme Flammengase absorbiert würden, womit eine Empfindlichkeitsvermehrung verbunden sei, die mit derjenigen, welche er durch elektrolytische Wasserstoffbeladung erhielt, in Parallele gestellt wird. Um zu sehen, ob dies richtig ist, fand eine Vergleichung der Wirkung des Glühens im Bunsenbrenner und des galvanischen Glühens statt. Wie die Versuche der Tab. 11 beweisen, liefern beide Prozesse dasselbe, so daß eine bemerkbare Wirkung von etwa absorbierten Flammengasen nicht eintritt. Das Ausglühen der Pt-Bleche im Bunsenbrenner genügt also und wurde daher der Einfachheit halber bei den meisten Versuchen angewendet.

Tabelle 11.

Objekt	Entladezeit	Objekt	Entladezeit
Ermüdetes Pt <sub>1</sub> . . .	128 sec	Ermüdetes Pt <sub>2</sub> . . .	158 sec
Galvanisch geglüht . .	43	Mit Bunsenbrenner geglüht . . . . .	42
Wieder geglüht . . .	44	Dies wiederholt . . .	46
„ „ . . .	48	„ „ . . .	48
Nach 1 <sup>h</sup> Pause mit Bunsenbrenner geglüht .	44	Nach 1 <sup>h</sup> Pause galvanisch geglüht . . .	48
Dies wiederholt . . .	43	Dies wiederholt . . .	48

Die Erhöhung der lichtelektrischen Empfindlichkeit ermüdeter Pt-Platten durch Ausglühen ist also als Beseitigung des Ermüdungsagens aufzufassen, die analoge Wirkung durch elektrolytischen Wasserstoff läßt sich zwanglos vielleicht auch darauf zurückführen, daß H das Ermüdungsagens ebenfalls wegschafft. Möglicherweise erklärt sich auch ein Teil der Resultate des Hrn. Wulf<sup>2)</sup> auf diesem Wege.

1) O. Nothdurft, Diss., Freiburg 1904, Univ.-Druckerei U. Hochreuther 1904, Über den Hallwachs- und Le Bon-Effekt.

2) Th. Wulf, l. c. p. 963. Die Versuche des Hrn. Wulf sind vielfach wegen des undefinierten Anfangszustandes der Platten, der mangelnden Lichtmessungen und des Gummis in der Zelle leider nicht recht deutbar.

Nach diesen Zwischenbemerkungen sollen nun die Versuche besprochen werden, welche positive Nachweise für den Einfluß der Gasabsorption auf die lichtelektrischen Erscheinungen liefern.

Wenn das aufgenommene Gas die im reinen Gefäß noch bestehende, die „Gefäßermüdung“ bedingt, so sollte im Vakuum ein Teil dieses Gases weggehen und dadurch die lichtelektrische Empfindlichkeit, wenn jegliche andere Ermüdungsursache ausgeschlossen ist, vermehrt, wenn dies nicht ganz geschehen ist, wenigstens die Stärke der Ermüdung vermindert werden.

Versuche in dieser Richtung sind wegen der Schwierigkeit, sie so einzurichten, daß sekundäre Ermüdungsursachen<sup>1)</sup> ausgeschlossen bleiben, sehr tüftelig, um so mehr als sich im Vakuum alle etwa auf den Oberflächen der Gefäßwände und a. a. O. sitzenden Substanzen besser verbreiten, was bei der notwendigerweise viele Tage langen Dauer des Eingeschlossen-seins in Gefäßen besonders ins Gewicht fällt. Ich bin deshalb an dieselben erst gegen Ende der vorliegenden Untersuchungen, nachdem vollständigere Orientierung in dieser Richtung erreicht war, herangegangen. Als Beispiel von auftretenden Störungen möge nur erwähnt werden, daß hochglanzpolierte Cu-Platten nach mehrtägigem Verweilen in einem evakuierten Rohr, wenn dies, wie bei den anfänglichen Versuchen mit einem Hg-Manometer versehen war, regelmäßig eine weißliche Trübung zeigten, die erst nach Entfernung der Manometer wegblieb.

Nach mannigfachen Vorversuchen gelangte man zu folgender Einrichtung der Gefäße. Sie bestanden aus etwa 1 m langen, 2 cm weiten Glasröhren, an deren einem Ende ein langes, mehrfach umgebogenes und mit verschiedenen Einschnürungen versehenes Biegerohr angeschmolzen war. Das Reinigen der Rohre geschah mit Sodalösung, das Trocknen durch einen Luftstrom unter Vorlegen eines 1 m langen Watterohres, darauf wurden sie beiderseits mit Watte verstopft einige Tage liegen gelassen.

Nach Anschmelzen des Biegerohres an die Pumpe ließ man, um beim Anblasen eingedrungene Feuchtigkeit zu ver-

1) W. Hallwachs, Physik. Zeitschr. 5. p. 494. 1904.



treiben, von der Pumpenseite her nochmals kurze Zeit, wieder unter Vorlage des Watterohres einen Luftstrom durchsaugen. Die inzwischen präparierte, zu untersuchende Platte von 10 cm Länge und 1,5 cm Breite gelangte währenddessen in einem geschlossenen Gefäß mit Gipsfenster zur lichtelektrischen Messung. Aus dem Gefäß herausgenommen, kam dann die Platte unmittelbar in das zu evakuierende Rohr, wurde mit einem gut gereinigten langen Glasstab, von dem man nur das äußerste, nicht in das Rohr gelangende Ende anfaßte, bis an das innere Ende des Rohres vorgeschoben und letzteres dann auf der anderen Seite, 10–15 cm vom äußeren Ende entfernt, möglichst rasch zugeschmolzen. Sofort trat die Wasserluftpumpe, darauf die Hg-Luftpumpe, eine Gaedepumpe<sup>1)</sup>, in Tätigkeit. Nach einigen Umdrehungen der letzteren war nahezu Röntgenvakuum erzeugt, eine kleine Prüfröhre an der Pumpe nur einen Moment mit Strom beschickt, damit kein Ozon später stören könnte, zeigte über  $\frac{2}{3}$  ihrer Länge grüne Fluoreszenz. Sofort von der Pumpe abgeschmolzen, lagerte das Gefäß nun etwa 10–20 Tage, eine Frist, welche sich nach Vorversuchen als geeignet ergeben hatte. Nach Ablauf derselben sprengte man das Ende des weiteren Teiles des Rohres ab, ließ die Platte in das lichtelektrische Untersuchungsgefäß gleiten und machte eine lichtelektrische Bestimmung.

Ein Zwilling des Rohrgefäßes wurde bis auf das Auspumpen in allem gleich behandelt, er enthielt eine Kontrollplatte bei Volldruck (Atmosphäre).

Man arbeitete mit drei solcher Röhrenpaare. In die Röhren des ersten und die Vakuumröhre des zweiten kamen je zwei, in die zweite Volldruckröhre eine Cu-Platte; die Röhren des dritten Paares wurden mit je einer Pt-Platte beschickt.

Die folgende Tabelle enthält die Resultate dieser Beobachtungen, die lichtelektrische Stärke ist auf die der Eichzelle als Einheit bezogen.

1) Da ich vielleicht der erste bin, der eine Arbeit, bei welcher diese Pumpe gebraucht wurde, veröffentlicht, so möchte ich nicht unterlassen, auf das überraschend schnelle Arbeiten und das ausnehmend bequeme Operieren mit dieser Pumpe hinzuweisen. Die Lieferung ist neuerdings Hrn. Leybold-Köln übertragen.

Tabelle 12.

Körper	Anfangs-empfindlichkeit	Druck im Gefäß	Ermüdungsfrist in Tagen	Endempfindlichkeit	Ermüdung auf	Relative Stärkezunahme
Cu <sub>1</sub>	2,63	0 mm	10	1,33	51 Proz.	46 Proz.
Cu <sub>2</sub>	1,94	0	10	1,06	55	
Cu <sub>3</sub>	2,96	760	10	1,10	37	
Cu <sub>4</sub>	2,89	760	10	1,00	35	
Cu <sub>5</sub>	3,13	0	19	3,80	122	153 "
Cu <sub>6</sub>	2,41	0	19	3,09	129	
Cu <sub>7</sub>	1,92	760	19	0,95	49	
Pt <sub>1</sub>	2,14	0	20	2,25	105	40 "
Pt <sub>2</sub>	2,49	760	20	1,88	75	

Bei den Versuchen mit dem zweiten Röhrenpaar zeigt die Volldruckröhre eine Ermüdung von 49 Proz., dies entspricht dem Fall eines mit aller Sorgfalt gereinigten Gefäßes (vgl. Tab. 8). Beim ersten und dritten Paar sind die Ermüdungen im Volldruck viel größer, als für eine gleiche Frist in einem bestens gereinigten Rohr: in diesen beiden Fällen müssen sich andere Ermüdungsursachen überlagert haben. Bei einer etwaigen Wiederholung der Versuche müßten auch die Rückseiten der Platten extra gereinigt werden, was leider versäumt wurde, auch wäre für die Rohrreinigung Erhitzung zu Hilfe zu nehmen.

Trotz dieser Unvollkommenheiten tritt aus den Versuchen der Tabelle ein kräftiger, Ermüdung vermindender Einfluß des Evakuierens hervor. Die Zunahme des lichtelektrischen Verhältnisses Vakuum- zu Volldruckplatte beträgt auch beim Platin noch volle 40 Proz. und erreicht beim zweiten Rohrpaar, welches für die Volldruckplatte störungsfreie Ermüdung aufweist, 153 Proz. Dabei ist die Empfindlichkeit der Vakuumplatte, auch absolut genommen, gestiegen, ebenso wie diejenige der Platinvakuumplatte. Die oben aus der Annahme, daß Gasabsorption die Ursache der geringen „Gefäßermüdung“ ist, gezogene Konsequenz, im Vakuum müsse die Ermüdung geringer

sein und eventuell, bei genügender Reinheit, ihr Vorzeichen wechseln, findet also durch diese Versuche volle Bestätigung.<sup>1)</sup>

Eine weitere Konsequenz des Einflusses der Gasabsorption wäre die, daß eine längere Zeit auf tiefer Temperatur gehaltene, dann wieder rasch auf Zimmertemperatur erwärmte Platte, eine Empfindlichkeitsabnahme zeigen sollte, denn die bei der tieferen Temperatur vermehrte Gasabsorption würde Zeit brauchen, um wieder vollständig rückgängig zu werden.

Ein Versuch in dieser Richtung wurde mit fester  $\text{CO}_2$  ausgeführt. Dabei kamen wieder, um den Einfluß der tiefen Temperatur möglichst von anderen Einflüssen befreit zu erhalten, zwei gleiche Apparate zur Anwendung, welche bis auf den Unterschied, daß die Hauptgefäße des einen in fester  $\text{CO}_2$ , des anderen in Zimmertemperatur verweilten, alle Manipulationen in gleicher Weise durchliefen. Die Apparate hatten folgende Zusammenstellung. An ein Rohrgefäß mit aufgeschliffener Haube war ein  $\text{CaCl}_2$ - und  $\text{KOH}$ -Rohr angeschmolzen, letzteres führte andererseits zu einer mit konzentrierter  $\text{KOH}$ -Lösung gefüllten, durch Kork und Paraffin geschlossenen Flasche. An eine zweite an das Gefäß geschmolzene, mit einem Hahn versehene Röhre ließ sich die Wasserluftpumpe anschließen. Das Gefäß des einen Apparates, welches ein Thermometer enthielt, sowie dessen  $\text{CaCl}_2$ - und  $\text{KOH}$ -Röhre befanden sich in fester  $\text{CO}_2$ . Zwei Tage vor dem Versuch wurde durch jeden Apparat  $\frac{5}{4}$  Stunden lang filtrierte Luft durchgesaugt und derselbe dann geschlossen. Nach Bestimmung der lichtelektrischen Stärke führte man die Platten in die Gefäße ein und ließ sie darin, nachdem zunächst  $\frac{1}{4}$  Stunde Luft durchgesaugt war, etwa 3,5 Stunden, das eine bei  $-80^\circ$ , das andere bei Zimmertemperatur, verweilen. Sodann kam das kalte Gefäß in ein Wasserbad von  $30^\circ$ ; nach 5—10 Minuten erreichte, wie das Thermometer angab, die eingeschlossene Platte Zimmertemperatur. Bei der unmittelbar darauf folgenden lichtelektrischen Untersuchung lieferte die „kalte“ Platte eine Ermüdung auf 63 Proz., während die in Zimmertemperatur verbliebene auf 87 Proz. gegangen war; letzteres zeigt, daß nach den Versuchen der Tab. 4 der früheren Arbeit<sup>2)</sup> zu urteilen, Neben-

1) Über eine weitere Bestätigung vgl. die Anm. p. 516.

2) W. Hallwachs, Physik. Zeitschr. 5. p. 494. 1904.

einflüsse genügend eliminiert blieben. Die Ermüdung der kalt gewesenen Platte ergibt sich wesentlich größer, so daß auch dieser Versuch die Wirkung der Gasabsorption bestätigt.

Denselben Versuch mit flüssiger Luft zu wiederholen gelang nicht, die Platte erhielt während der Erwärmungsperiode jedesmal einen weißlichen Beschlag, welcher vermutlich durch einen von der außen erwärmten Gefäßwand nach der kalten Platte hinüber destillierenden Körper veranlaßt wurde. Die Platte des kalten Gefäßes zeigte sich zwar nach der schließlichen Erwärmung etwas stärker ermüdet wie die Vergleichsplatte, indes nicht soviel wie bei dem Versuche mit  $-80^{\circ}$ . Dies Verhalten würde sich wohl erklären, wenn der Beschlag aus  $\text{CO}_2$  bestanden hätte, da in  $\text{CO}_2$  die lichtelektrische Wirkung stärker ist wie in Luft<sup>1)</sup> und die unmittelbar anliegende Gaschicht den Haupteinfluß auf die Stärke der lichtelektrischen Wirkung haben muß.

Eine weitere Bestätigung für den Einfluß der Gasabsorption wurde durch die Bestimmung der auch zu anderen Zwecken erforderlichen Temperaturkoeffizienten der Eichzellen erhalten. Temperaturkoeffizienten ließen sich nur mit durch Alterung im Gefäß genügend konstant gewordenen Platten ausführen, weil sonst die durch gewöhnliche Ermüdung eintretende Empfindlichkeitsänderung diejenige, welche lediglich eine Folge der Temperaturerhöhung war, überdeckt hätte. Dazu standen die Tab. 8 benutzten Eichzellen mit Pt und  $\text{CuO}$  zu Gebote, Messinggefäße von der p. 471 beschriebenen Art. Die Platten brauchten, wenn man sich auf kleine Temperaturintervalle beschränkte, aus den Zellen, in denen sie sich seit nahezu einem bez. 2,5 Jahren befanden, nicht herausgenommen zu werden.

Die Zelle mit Pt ergab bei  $19^{\circ}$  eine lichtelektrische Stärke 1,00, nach 9 stündigem Verweilen in einem Luftbade von etwa  $32^{\circ}$  war dieselbe 4 Min. nach dem Herausnehmen auf 1,11 heraufgegangen und nahm nun, während die Zelle in Zimmer-temperatur verblieb, wieder ab: nach einer halben Stunde hatte

1) A. Stoletow, *Compt. rend.* 107. p. 91. 1888; W. M. Varley, *Phil. Trans. London* 202. p. 439. 1904.

sie den Wert 1,05 und nach 17 Stunden den Wert 1,01 erreicht. Eine Vorrichtung, um die Temperatur der Platte zu messen, war nicht vorhanden. Um diese einzuführen, hätte man die Zelle öffnen müssen, und gerade dies mußte in erster Linie vermieden werden. Man begnügte sich daher mit der angenäherten Kenntnis der Temperatur. Bei diesen, den weiter folgenden und anderen gelegentlichen Versuchen ähnlicher Art schien die lichtelektrische Stärke hinter der momentanen Temperatur zurückzubleiben und einen konstanten Wert erst dann zu erreichen, wenn die betreffende Temperatur längere Zeit bestanden hatte.

Die Zelle wurde in einem weiteren Versuche 5 Stunden auf  $45^{\circ}$  gehalten. 2 Min. nach dem Herausbringen aus dem Bad lieferte sie lichtelektrisch 1,29, nach 10 Min. 1,14, nach 20 Min. 1,06 und nach 23 Stunden 1,03, alles bei Zimmertemperatur.

Nunmehr kam die Zelle über Nacht in eine Temperatur von etwa  $3^{\circ}$  und lieferte dann 2 Min. nach dem Herausnehmen 0,96, nach 20 Min. 0,98.

Man sieht, daß die Zelle schließlich immer wieder sehr nahezu auf ihren Anfangswert zurückkommt. Aus den Zahlen läßt sich ein Temperaturkoeffizient von etwa  $\frac{1}{2}$  Proz. für den Grad herleiten.

Die CuO-Zelle, welche anfänglich eine Empfindlichkeit 0,588 hatte, ergab, nach 4 Stunden Verweilen in  $34^{\circ}$ , 3 Min. nach dem Herausnehmen 0,665, nach 5 Min. denselben Wert, gleich darauf berührt schien sie, nach dem Gefühl zu urteilen, Zimmertemperatur erreicht zu haben; nach  $\frac{1}{2}$  Stunde erhielt man 0,622, am Tage darauf 0,594, alles bei einer Temperatur von etwa  $21^{\circ}$ . Der Temperaturkoeffizient, für den es sich nur um eine Orientierung handelte, beträgt etwa 0,9 Proz.

Man sieht aus den vorstehenden Versuchen, daß die Gasaufnahme auch das Verhalten gegenüber der Temperatur erklärt, indem sie eine Zunahme der Empfindlichkeit mit steigender Temperatur fordert, welche der Versuch auch liefert.

Die Ergebnisse dieses Abschnittes zusammenfassend und mit dem früher Gefundenen vereinigend, wird man sagen können, daß sich die lichtelektrische Ermüdung in reinen Gefäßen gut auf die Gasabsorption der Platten zurückführen läßt. Auch die hieraus gezogenen Konsequenzen sind mit den Tatsachen durchaus im Einklang, während alle früheren Erklärungsversuche diesen widerstreiten. Daß aus unseren gesamten Kenntnissen über die lichtelektrischen Erscheinungen ein Einfluß der ab- und adsorbierten Gase gefolgert werden muß, sichert diese Auffassung.

#### Politur der Platten.

Das Vorstehende erklärt nun auch, warum es so schwer ist, die Platten derart zu polieren, daß sie konstante Empfindlichkeit bekommen. Im Laufe der Untersuchungen ergab sich, daß die Empfindlichkeit sehr stark davon abhängt, wie warm die Platte während des Polierens geworden ist, daß die höchsten Empfindlichkeiten dann erreicht wurden, wenn die Platten sich ordentlich erwärmt hatten. Die Temperaturerhöhung bewirkt offenbar Entfernung eines weiteren Teiles des eingedrungenen Gases und damit eine Empfindlichkeitsvermehrung. Achtete man auf diesen Umstand, so war die Anfangsempfindlichkeit bei verschiedenen Platten viel konstanter. Daß das Pt durch einfaches Erhitzen ebenfalls auf maximale und recht konstante Empfindlichkeit kommt, erklärt sich auch auf diesem Wege einfach.

#### D. Über die Wirkungsweise des Ozons bei der lichtelektrischen Ermüdung.

Nachdem im vorigen die verhältnismäßig geringe Ermüdung in speziell gereinigten Gefäßen auf eine Wirkung der von dem Metalle aufgenommenen Gase und in der früheren Arbeit<sup>1)</sup> die starke Ermüdung im freien Raum auf Ozon zurückgeführt worden ist, bleibt jetzt noch die Aufgabe übrig, zu ermitteln, wie die Wirkung des Ozons zustande kommt, und welcher Zusammenhang zwischen der Ermüdung außer- und innerhalb von Gefäßen besteht.

1) W. Hallwachs, Physik. Zeitschr. 5. p. 489. 1904.



Für den Ursprung der Wirkung des Ozons können, wenn man zunächst von den seitherigen Ergebnissen dieser Untersuchung absieht, folgende drei Möglichkeiten in Betracht gezogen werden: chemische Wirkung (z. B. Oxydation), d. h. Verwandlung der Plattensubstanz in eine lichtelektrisch unempfindlichere; elektrische Wirkung, d. h. Bildung bez. Variation einer kontaktelektrischen Doppelschicht mit der negativen Seite nach außen; direkter Einfluß auf die Bewegung der Elektrizitätsträger. Die Entscheidung wurde herbeizuführen erstrebt durch Versuche über die Empfindlichkeitsabnahme in den ersten Augenblicken nach dem Einbringen der Platten in Ozon.

Für dieselben diente folgende Anordnung. Zwei  $25 \times 20 \times 15$  cm Zn-Gefäße standen vor der Bogenlampe, 1 m davon entfernt, das Licht drang durch vorn aufgekittete Quarzplatten. In der oberen Fläche der Gefäße befindliche größere Öffnungen ließen sich durch schwere eiserne Deckel, die in eine Hg-Rinne tauchten, dicht verschließen. Durch diese Öffnungen konnte man lichtelektrische Zellen sehr rasch einführen, an zwei isolierten stärkeren Querdrahten festhängen und dann die Gefäße wieder verschließen, eine Manipulation, die etwa 3 Sek. beanspruchte. Der eine der genannten Querdrahte stand mit der in der Zelle sitzenden Untersuchungsplatte, außerdem mit dem Elektrometer in Verbindung, der andere mit dem Drahtnetz der Zelle und der Batterie von +280 Volt. Die Zelle selbst bestand aus einem in den einen Querdraht einzuhängenden Metallträger, auf welchem sich die Untersuchungsplatten einfach einspannen ließen, und aus einem durch zwei Schellack-säulchen in etwa 6 mm Abstand vor der Platte gehaltenen Drahtnetz, von welchem ein federnder Draht mit Haken zu dem anderen, mit der Batterie verknüpften, sonst isolierten, Querdraht führte. Alle Zuleitungen waren metallisch eingehüllt, ein am Elektrometer sitzender Schlüssel gestattete dieses, samt Zuleitungen zur Zelle und Platte darin, bis zum Versuchsbeginn zu erden und dann zu isolieren. Vom Öffnen des Gefäßes bis zu der nach Einhängen der Zelle stattfindenden Öffnung des Erdschlüssels und damit des Versuchsbeginns vergingen im allgemeinen nicht ganz 6 Sek.

Zwei an dem einen Zinkkasten sitzende Rohrstützen er-



laubten einen Ozonstrom durchzuleiten, wobei die Wasserluftpumpe das in einer Ozonröhre erzeugte Gas ansaugte. Vor den einzelnen Versuchen wurde die Pumpe abgestellt. Der Ozongehalt im Gefäß war meistens von der Größenordnung von 0,2 g im m<sup>3</sup> ( $\frac{1}{100}$  Volumprozent), wie sich aus gelegentlichen Titrierungen ergab.

Der Versuch verlief so, daß nach Einspannung der Platte die Zelle zuerst im Luftkasten, sodann, nach Umsetzung in den Ozonkasten, dort auf ihre Empfindlichkeit, immer unter Mitbeobachtung der Eichzelle, untersucht wurde. Die beiden Kästen waren miteinander verglichen. Im Ozon las man die Durchgangszeiten des Elektrometers durch die einzelnen Skalenteile ab. Daß letztere für den vorliegenden Zweck genügend gleichwertig waren, ergab sich aus besonderen Versuchen, welche für die ersten sechs Skalenteile, als Mittel aus sechs Ablesungen, Durchlaufzeiten von 5,9; 6,0; 6,0; 6,35; 6,1; 6,0 Sek. lieferten.

Die folgende Tabelle gibt ein Versuchsbeispiel. Die angegebenen Zeiten bedeuten die Zeiten bis zum Durchschreiten der angegebenen Skalenteile, bei der Eichzelle die Zeit für die Zurücklegung von 39 Skt. eines zweiten Elektroskops.

Tabelle 13.

Cu in Luft.

Skalenteile	5	10	20	E
Sekunden	5,1	10,7	21,4	69,9
	5,0	—	20,4	
	5,3	10,8	21,8	

Cu in Ozon.

$t = 0$  beim Versuchsanfang, d. h. 6 Sek. nach Beginn des Umsetzens (Öffnung des Deckels der Ozonzelle).

Skalenteile	1	2	3	4	5	10	15	20	E
Sekunden	2,2	5,0	8,0	10,8	14,0	28,7	44,0	60,4	69,8

Nachdem diese Platte im ganzen etwa 1,5 Min. im Ozonkasten verweilt hatte, wurde sie wieder in den Luftkasten umgesetzt und dort ergaben sich zu den Zeiten  $t$  (Minuten) nach dem Einhängen folgende Zeiten.

Tabelle 14.

t	5 <sup>p</sup>	10 <sup>p</sup>	15 <sup>p</sup>	20 <sup>p</sup>	E
(Minuten)	Sekunden				
0	8,8	17,9	27,0	36,0	69,7
0,7	7,8	16,2	24,8	33,8	
3,5	7,5	15,5	23,8	31,8	
9,5	6,7	13,9	20,8	27,8	70,0
10	6,8	13,8	20,9	28,2	
20	6,3	13,0	19,6	26,7	
20,5	6,4	13,2	20,0	26,8	70,0
30	6,5	13,1	19,5	26,2	
30,5	6,4	12,3	18,3	25,0	
40	5,9	12,2	18,6	24,9	68,3
40,5	6,2	12,5	19,0	25,3	

Von dem zugestrahnten, ultravioletten Licht wird in der Ozonzelle durch das Ozon selbst, wie ein Hilfsversuch zeigte, etwa 4 Proz. absorbiert, so daß alle folgenden Angaben der direkt als Zeitenverhältnis angegebenen Ermüdungen um 4 Proz. wegen Verminderung der bis zur Platte gelangenden Lichtstärke zu korrigieren sind.

Man sieht aus den Tabellen, daß das Ozon einen außerordentlich starken Einfluß besitzt, daß die Cu-Platte 7 Sek. nach dem Einbringen bereits 51 Proz. ihrer Empfindlichkeit eingebüßt hat, nach 15 Sek. 60 Proz., welche Ermüdung dann bis zu 60 Sek. nur auf 64 Proz. wächst. Bei diesen Versuchen war der Ozongehalt nicht bestimmt worden; bei dem gemessenen Ozongehalt 0,2 g im m<sup>3</sup> (0,01 Volumproz.) fand sich für 7 Sek. eine Abnahme der Empfindlichkeit um 71 Proz., nach 25 Sek. um 74 Proz., nach 85 Sek. um 77 Proz. Hier wird in 7 Sek. erreicht, was in ozonfreier Luft  $\frac{1}{4}$  bis 1 Jahr braucht (Tab. 8); daß das Ozon, obwohl es nur spurweise in der Atmosphäre vorkommt, die Hauptursache der lichtelektrischen Ermüdung bildet, scheint nicht mehr verwunderlich. Weiter ersieht man aus Tab. 14, daß der größte Teil der Ermüdung allmählich wieder weggeht, wenn man die Platte in

Luft bringt; die Cu-Platte erholt sich in 4 Min. bis auf 86 Proz. ihres Anfangswertes.<sup>1)</sup>

Die Schnelligkeit, mit welcher die Ozonwirkung einsetzt, und ihr allmähliches Wiedererlöschen nach dem Herausbringen der Cu-Platte aus dem Ozon würde die Annahme, daß Oxydation der Oberfläche, ein Prozeß, der doch nicht so schnell wirken und nicht ohne weiteres rückgängig werden kann, die Ermüdung veranlasse, widerlegen, wenn diese nicht schon durch den früheren Nachweis, daß die Kupferoxyde etwa dieselbe lichtelektrische Empfindlichkeit wie Cu besitzen, ausgeschaltet wäre. Der jetzige Nachweis beseitigt indes die Zweifel, die man noch im hier vorliegenden Fall, wo die Platten direkt in Ozon eingehängt werden, hegen könnte, und stärkt so die frühere Beweisführung.

Zur Prüfung der zweiten der oben genannten Möglichkeiten, Bildung einer elektrischen Doppelschicht, wurden verschiedene Metalle: Cu, Pt, Ag, Zn, Fe auf ihre Ermüdung im ersten Augenblicke nach dem Einbringen ins Ozon verglichen. Um die allmähliche Abnahme des Ozongehaltes zu eliminieren, schlossen im allgemeinen zwei Bestimmungen der Ermüdung des Cu diejenigen eines anderen Metalles ein. In der nachstehenden Tab. 15 sind die Ergebnisse zusammengestellt. Die Zahlen geben die Empfindlichkeitsabnahme in Prozenten des Anfangswertes in Luft. „Wirkungszeit“ ist die Dauer des Aufenthaltes im Ozon. Die Einzelheiten der Beobachtungen, aus welchen die folgenden Daten berechnet sind, entsprechen dem Tab. 13 aufgeführten Beispiel.

Die Ozongehalte sind bei den drei Versuchssätzen nicht ganz die nämlichen, so daß nur die Versuche desselben Satzes miteinander verglichen werden können. Bei dem letzten (Versuch für Ag) mißglückte der eine Versuch mit Cu, was aber insofern nichts zu sagen hat, als bei diesem Satz durch Absorptionsbeobachtung des die Zelle durchstreichenden Lichtes vor und nach den Versuchen die fast vollständige Konstanz des Ozongehaltes festgestellt wurde.

1) Eine solche weitgehende Erholung trat jedoch nur nach besonders kurzem Aufenthalt im Ozon ein. Bei längerer Einwirkung (z. B. 5 Min.) blieb die Cu-Platte dauernd stark ermüdet (z. B. auf  $\frac{1}{2}$ ), CuO erholt sich auch dann, wie schon in der früheren Arbeit gezeigt.

Tabelle 15.

Abnahme der lichtelektrischen Stärke im Ozon.

Substanz	Wirkungszeit		
	60 Sek.	30 Sek.	10 Sek.
Empfindlichkeitsabnahme in Prozenten			
Cu <sub>1</sub>	79,9	78,3	78,1
Pt <sub>1</sub>	76,8	74,7	74,9
Cu <sub>2</sub>	75,6	74,3	71,7
Pt <sub>2</sub>	75,7	73,9	71,8
	77,8	76,3	74,9
	76,2	74,3	73,4
	36 Sek.	18 Sek.	9 Sek.
Cu <sub>1</sub>	66,1	64,7	63,2
Zn	62,1	62,3	61,5
Cu <sub>2</sub>	62,9	61,4	59,5
		63,0	61,4
	70 Sek.	46 Sek.	16 Sek.
Ag	77,8	75,1	70,8
Cu	75,8	75,1	72,4

Aus Tab. 15 folgt für alle Metalle sehr starke lichtelektrische Empfindlichkeitsabnahme und diese hat unter der hier stattfindenden Voraussetzung kurzer Einwirkung des Ozons für Pt, Zn, Cu und Ag innerhalb der Versuchsfehler denselben Wert. Aus dieser Unabhängigkeit von der Substanz der Platte folgt, insbesondere wegen der großen elektromotorischen Verschiedenheit von Zn einerseits und den übrigen Metallen andererseits, daß die durch das Ozon bewirkte Ermüdung nicht kontakt-elektrischen Ursprunges ist. Damit bleibt von den oben erwähnten Erklärungsmöglichkeiten nur die übrig, daß die starke Wirkung des Ozons auf einem direkten Einfluß desselben auf die Elektrizitätsträger beruht. Auf die weitere Erörterung, in was dieser Einfluß bestehen möchte, wird weiter unten eingegangen werden (p. 510ff.).

Das untersuchte Fe verhielt sich etwas anders, wie die folgende Tabelle zeigt.

Tabelle 16.

Substanz	Wirkungszeit		
	80 Sek.	50 Sek.	25 Sek.
Empfindlichkeitsabnahme in Prozenten			
Cu <sub>1</sub>	61,5	60,3	57,7
Fe	78,0	74,7	68,3
Cu <sub>2</sub>	60,5	58,9	55,9
	61,0	59,6	56,8
	66 Sek.	46 Sek.	22 Sek.
Cu <sub>1</sub>	75,8	75,1	72,4
Fe	88,7	81,9	75,6
Cu <sub>2</sub>	68,6	67,2	62,6
	72,2	71,2	67,5

Das Fe zeigt erheblich größere Schwächung wie das Cu. Indes haben die Werte für Eisen einen stärkeren und mit Abnahme der Wirkungszeit beträchtlich steigenden Gang, sie konvergieren also für die Zeit Null gegen die des Cu und werden dann nur noch wenig von ihnen entfernt sein; es ist leicht möglich, daß sie schließlich ganz mit ihnen zusammenfallen würden. Der stärkere Gang in der Schwächung des Eisens weist darauf hin, daß sich ein weiterer, die Empfindlichkeit vermindender Prozeß hier überlagert. Es liegt nahe, denselben darin zu vermuten, daß ein Oxyd gebildet wird, und dies lichtelektrisch weniger empfindlich wie Eisen ist. Die relative Stärkeverschiedenheit der beiden Cu-Werte im zweiten Beobachtungssatz der Tabelle beruht darauf, daß dieser zeitlich genommen einer der ersten Beobachtungssätze war, bei dem noch etwas lange Zeit zwischen den einzelnen Beobachtungen verstrich.

Da es sehr mühsam ist, und vieler Versuche bedarf, wenn man die einzelnen Platten zu Anfang auf konstante und maximale Empfindlichkeit durch die Politur bringen will, verzichtete man hierauf, nachdem ein Hilfsversuch mit sehr stark vorermüdeten Cu-Platten die Gewißheit ergeben hatte, daß die bei den Platten der Hauptversuche noch bleibenden Verschiedenheiten der Anfangsempfindlichkeit keinen hier in Betracht kommenden Einfluß auf die Schwächungen ausüben konnten. Die folgende Tab. 17 enthält das Resultat dieses

Kontrollversuches, bei welchem die Cu-Platten bis hinab auf etwa  $\frac{1}{8}$  ihrer maximalen Empfindlichkeit vorermüdet waren, die Pt-Platte dagegen, wie bei den Versuchen der Tab. 15, frisch ausgeglüht wurde.

Tabelle 17.

Substanz	Wirkungszeit	
	66 Sek.	32 Sek.
Ermüdung in Prozenten		
Cu <sub>1</sub>	62	59,8
Pt	75,1	71,1
Cu <sub>2</sub>	58,8	54,6
	60,4	57,2

Die Werte für Cu bleiben, obwohl dieses so sehr stark, auf  $\frac{1}{8}$  seines Maximalwertes, vorermüdet ist, nur ca. 20 Proz hinter denen des Pt zurück. Wenn also die für Tab. 15 benutzten Platten auch selbst bis auf die Hälfte vorermüdet waren, konnte dies die Resultate nicht erheblich beeinflussen.

In der früheren Arbeit war der Schluß, daß der Hauptbetrag der lichtelektrischen Ermüdung im freien Raum einer Wirkung des Ozons zuzuschreiben sei, darauf gegründet, daß die große Verschiedenheit, welche Cu und CuO hinsichtlich der lichtelektrischen Ermüdung zeigen, von keiner der bekannten, in der Atmosphäre enthaltenen Substanzen veranlaßt wird außer vom Ozon. CuO ermüdet im Ozon nicht dauernd, Cu mit großer Stärke, alle untersuchten Substanzen, welche Ermüdung veranlassen, wirken auf beide wesentlich gleich. Diesem Schluß konnte man das Bedenken entgegensetzen, daß in der Luft doch nur sehr geringe Ozonmengen vorhanden seien, so daß das Ozon eine ganz außerordentliche Wirkung auf die lichtelektrische Entladung haben müsse, wenn solch kleine Mengen die ziemlich kräftigen Ermüdungen erklären sollten. Diese Bedenken werden durch die vorliegenden Versuche gehoben. Bei einem Ozongehalt von nur 0,2 g im m<sup>3</sup>, dessen Bestimmung weiter unten erläutert wird, oder 0,01 Volumprozent, hatte, wie oben angegeben, die Empfindlichkeit bereits nach 7 Sek. um 71 Proz. abgenommen. Es genügen also äußerst geringe Mengen Ozon zu kräftiger Ermüdung. Im Freien hatte man

in der früheren Arbeit etwa in 1,5 Stunden eine Ermüdung auf die Hälfte bekommen<sup>1)</sup>, zur Ermüdung um 70 Proz. waren etwa 2–3 Stunden erforderlich, also etwa 1800 mal so lang als im Ozon von 0,01 Volumprozent. Man wird daher einen Ozongehalt der Luft von höchstens  $\frac{1}{130\,000}$  Volumprozent für ausreichend erachten müssen, um die beobachtete Ermüdung der Größenordnung nach zu erklären, eventuell genügt wegen der Bewegung der Luft im Freien weniger.

Was die Ozontitrierung betrifft, so wurde eine mit der Gasuhr gemessene Menge des Gases, nachdem sie vorher den bei den Versuchen benutzten Zinkkasten durchlaufen hatte, durch zwei hintereinander geschaltete Flaschen mit gemessenen Mengen 0,1 norm. KJ-Lösung gesaugt, und gemessene Proben davon nach Zusatz äquivalenter Mengen  $\text{H}_2\text{SO}_4$  und etwas Stärkekleister mit 0,01 norm. Natriumthiosulfat titriert. 1 cm<sup>3</sup> letzterer Lösung entspricht 0,24 mg Ozon.

Diese Einschaltung der KJ-Flaschen erfolgte erst, nachdem etwa eine Stunde lang der Ozonstrom im Gang gewesen war. Während des Ozondurchganges fanden nun gleichzeitig Messungen der Absorption des ultravioletten Lichtes durch das Ozon statt. Zu diesem Zweck erhielt der Zinkkasten ein zweites Quarzfenster, welches, dem in der Vorderwand gegenüber, in der Rückwand saß. Dahinter wurde eine lichtelektrische Zelle aufgestellt und, aus dem Vergleich von deren Empfindlichkeit bei Luft und Ozonfüllung des Kastens, die durch das Ozon hervorgebrachte Absorption des lichtelektrisch wirksamen Lichtes bestimmt. Es ergab sich, daß einem Gehalt von 0,62 g Ozon im m<sup>3</sup> oder  $3,2 \times 10^{-2}$  Volumprozent eine Lichtabsorption von 25 Proz. entsprach. Die durchstrahlte Ozonstrecke betrug 15,4 cm, hieraus ergibt sich für reines Ozon ein Schwächungskoeffizient  $\alpha = 65$ , welcher Wert mit dem von Hrn. E. Meyer<sup>2)</sup> gefundenen im Einklang ist, soweit ein Vergleich wegen des zusammengesetzten Lichtes gezogen werden kann.

Auf Grund der angegebenen Daten wurde der Ozongehalt in anderen Fällen aus der Lichtabsorption bestimmt, z. B. in

1) l. c. p. 489.

2) E. Meyer, Ann. d. Phys. 12. p. 855. 1903.



dem oben p. 506 (unten) angegebenen Fall aus der gefundenen Lichtabsorption von 8,4 Proz. der Ozongehalt von 0,2 g im m<sup>3</sup>.

Auch über den Ozongehalt der freien Luft habe ich wenigstens eine Orientierung zu erlangen gesucht. Damit dabei nicht vor dem Eintritt in die KJ-Lösung an Rohrwänden Entozonisierung eintritt, wurde ein etwa 1,5 cm weites, langes Glasrohr in eine kleine Kristallisationsschale mit KJ-Lösung gestülpt und von oben angesaugt. Das Rohr tauchte dabei so in die Lösung ein, daß deren Niveau nach Einsaugung von etwa  $\frac{2}{3}$  der Flüssigkeit bis zur unteren Rohrmündung sank, und nun die Luft durch die ins Rohr gesaugte Flüssigkeit hindurchperlte. Nach dem Durchleiten von 5 m<sup>3</sup> Luft waren zur Titrierung 4,6 cm<sup>3</sup> der Natriumthiosulfatlösung erforderlich, was 0,2 mg im m<sup>3</sup> ergibt. Dies ist etwa der tausendste Teil der p. 506 angegebenen Ozonkonzentration im Zinkkasten. Es würde also dieser Ozongehalt mit demjenigen, welchen man oben als völlig ausreichend zur Erklärung der lichtelektrischen Ermüdung berechnete, im Einklang sein.

Indessen verlief die Ozontitrierung der Luft insofern nicht glatt, als sich starke Nachbläunung zeigte, welche nach zwei Tagen bereits weitere 1,8 cm<sup>3</sup> Titrierlösung, d. h. 40 Proz. der ursprünglichen Menge erforderte. Über eine für den vorliegenden Zweck brauchbare, ordentliche Methode, den Ozongehalt der Luft zu bestimmen, konnte ich bisher nichts finden und es scheint mir fast, als ob eine solche nicht vorhanden sei. Zimmerluft gab auf gleiche Weise untersucht nur 60 Proz. des für das Freie ermittelten Ozongehaltes. Auch dies ist mit den früheren Versuchen im Einklang, zumal die stärkere Luftbewegung im Freien die Ozonabsorption steigern muß, aber diese Feststellungen sind aus dem angegebenen Grunde nur sehr oberflächlicher Art. Da die Nachbläunung auf das Vorhandensein von Stickstoffoxyden hinweist, und bei meinen Versuchen mit Ozon die Bildung von solchen nicht besonders eliminiert werden konnte, bleibt es immerhin möglich, daß diese die dem Ozon zugeschriebenen Wirkungen mit veranlassen.

Zum Schluß fragt es sich noch, ob sich etwas darüber ermitteln läßt, welcher Art die direkte Einwirkung des Ozons auf die Elektrizitätsträger ist.

Einen schematisierten Ansatz für die Vorgänge in der Nähe der Platte hat Hr. J. J. Thomson gegeben<sup>1)</sup>, nämlich

$$i = \frac{eJ}{1 + D/\lambda Xu},$$

wo  $i$  die lichtelektrische Stromstärke,  $J$  die Zahl der pro Sekunde gebildeten Ionen,  $X$  die Feldstärke,  $D$ ,  $u$ ,  $e$  den Diffusionskoeffizienten, die spezifische Geschwindigkeit und die Ladung der Ionen,  $\lambda$  die Länge der Strecke bedeutet, auf welcher sich Hr. Thomson die Dichtigkeit der Elektrizität von der Platte aus gerechnet ansteigend denkt.  $D/u$  ist für alle im gewöhnlichen Gaszustand befindlichen Gase bei gleichem Druck gleich.

Die angegebene Formel hat zur Folge, daß  $i_1/i_2$ , das Verhältnis der Stromstärken für zwei Felder  $X_1$  und  $X_2$ , variieren muß, wenn man das Gas ändert, falls nicht etwa auch  $\lambda$  unabhängig vom Gas wäre. Letzteres darf man zunächst nicht annehmen, da sonst  $i$  unabhängig vom Gas sein müßte, was wenigstens für Luft,  $\text{CO}_2$  und H als sicher unzutreffend erwiesen ist.<sup>2)</sup> Auch andere Ansätze, die ich für den Verlauf in unmittelbarer Nähe der Platte versucht habe, ergeben, wie sich bei der Komplikation der Verhältnisse ja vermuten läßt, die Abhängigkeit der Stromstärke von der Feldstärke einerseits und den Eigenschaften der Elektrizitätsträger andererseits nicht in solcher Form, daß  $i_1/i_2$  für verschiedene Gase denselben Wert haben könnte.

Um zu sehen, ob demgemäß  $i_1/i_2$  für Luft und ozonisierte Luft verschiedene Werte hat, wurde die lichtelektrische Empfindlichkeit in diesen Gasen für zwei Felder ( $X_1 = 498$  und  $X_2 = 5,13$  Volt/cm) bestimmt. Dazu diente im wesentlichen die p. 500 beschriebene Anordnung. Die bestrahlte Platte war aus Kupfer, ihr Abstand vom Netz der Zelle betrug 0,55 cm. Wechselweises Beobachten im starken und schwachen Feld gestattete das Absinken der Empfindlichkeit während der Versuchsreihe, gleichzeitiges Beobachten der Etalonzelle, die kleinen Lichtschwankungen zu eliminieren. Bei  $X_1$  lagen 280 Volt am

1) J. J. Thomson, Cond. of el. p. 228. 1903. Übers. von E. Marx, p. 234. 1906.

2) W. M. Varley, l. c. p. 484. Tab. IV.

Netz, die beobachtete Zeit  $t_1$  entspricht 20 Skt. (11,8 Volt) Elektroskopgang; bei  $X_2$  hatte das Netz 4 Volt,  $t_2$  bezieht sich auf 4 Skt. oder 2,35 Volt, so daß die Spannungsdifferenz Netz-Platte während des Versuches auf 1,65 Volt herabsank und im Mittel den Wert 2,82 Volt besaß. Die am Etalon, wie gewöhnlich für 31 Skt. Elektrometeregang beobachtete Dauer ist in der folgenden Tab. 18, welche die Resultate der hier besprochenen Versuche enthält, mit  $t_0$  bezeichnet.

Die lichtelektrischen Empfindlichkeiten  $i_1$  und  $i_2$  ergeben sich als reziproke Verhältnisse von  $t_1$  und  $t_2$  zu  $t_0$  nach Reduktion auf gleiche Potentialänderung. Die Tabelle enthält nur die Verhältnisse  $i_1$  zu  $i_2$ ; die Folge der Vertikalspalten schließt sich der zeitlichen Versuchsfolge an. Der Ozongehalt betrug etwa 0,06 Volumprozent.

Tabelle 18.

	Luft				Ozonisierte Luft					
$t_0$	70,1	71,0	70,9	71,0	69,0	71,4	71,5	70,3	70,0	72,2
$t_1$	20,4	—	20,8	—	75,7	—	99,0	—	115,0	—
$t_2$	—	54,0	—	57,0	—	225	—	282	—	320
$i_1/i_2$	—	13,0	13,3	—	—	13,1	12,9	13,3	12,9	—
Mittel: $i_1/i_2 = 13,1$					Mittel: $i_1/i_2 = 13,0$					

Aus diesen Versuchen folgt nun, daß  $i_1/i_2$  nicht verschieden, sondern gleich ist für beide Fälle, obwohl die Felder im Verhältnis 100:1 stehen, und trotzdem beide  $i$  im Ozon sehr viel kleiner sind, etwa den vierten Teil betragen (nach der Tabelle  $1/5,5$ , welcher Wert aber wegen der Lichtabsorption des Ozons mit  $4/3$  zu multiplizieren ist). Vorversuche, bei denen das Feld allerdings nur im Verhältnis 3:1 variiert, indes gewartet worden war, bis die Empfindlichkeit im Ozon auf den siebenten Teil herabging, hatten dasselbe Resultat geliefert.

Aus der durch die Versuche bewiesenen Konstanz von  $i_1/i_2$  ist zu schließen, daß die Wirkung des Ozons sich nur in den Schichten abspielen kann, wo bei Variation des äußeren Feldes das Gesamtfeld nicht merklich variiert. Das geschieht aber nur in unmittelbarer Nähe und in den oberflächlichen Schichten

der Platte. Das Feld des elektrischen Spiegelbildes nimmt in der nächsten Nähe der Platte so große Werte an, daß äußere Felder von 0,5—500 Volt/cm, wie sie bei meinen Versuchen benutzt wurden, klein dagegen bleiben. Zugleich wird dort die Absorption der Elektronen durch das Gas sehr groß werden, da erstens die unmittelbar an der Oberfläche anliegende Gasschicht und das eingedrungene Gas stark kondensiert sind und zweitens das Absorptionsvermögen für die Elektronen außerordentlich große Werte hat. Hr. Lenard findet<sup>1)</sup> für Luft von 1 mm Hg-Druck das Absorptionsvermögen 30, was für Atmosphärendruck einen Absorptionskoeffizienten 23000 ergibt. Würde die adhärierende Gasschicht im Mittel z. B. 50 Atm. Druck besitzen, so kämen durch eine Schicht von  $2,5 \times 10^{-6}$  cm oder  $\frac{1}{4}$  molekulare Weglänge (Luftmoleküle, Atmosphärendruck) nur 5,5 Proz. der Elektronen hindurch, in diesem Abstand beträgt aber das Feld des elektrischen Spiegelbildes bereits 8000 Volt/cm.<sup>2)</sup> Dazu kommt noch, daß das in die Oberflächenschichten der Platten eingedrungene Gas bei der Absorption mitwirkt. Die Dicke der Gasschicht hängt nun nicht vom äußeren Feld ab, ihre Dichte vermindert sich ferner nach außen hin rasch, so daß die Absorption in Abständen von der Platte, wo das äußere Feld nicht mehr gegen das Spiegelbildfeld klein bleibt, nicht mehr wesentlich in Betracht kommt. Unter diesen Umständen kann das oben genannte Verhältnis  $i_1/i_2$  auch bei so beträchtlicher Abnahme der beiden  $i$ , wie sie durch das Ozon bewirkt werden, konstant bleiben, wenn sich die Wirkung des Ozons wesentlich auf die unmittelbarste Nachbarschaft der Plattenoberfläche beschränkt. Man braucht nur anzunehmen, daß es in diese Schichten eindringt und ein besonders großes Absorptionsvermögen für langsame Elektronen besitzt. Wenn es gelingen wird, dieses direkt zu bestimmen, so wäre damit die Entscheidung für die hier entwickelte Anschauung zu gewinnen. Daß das Ozon ein großes Absorptionsvermögen für die Elektronen hat, liegt nicht ganz fern zu vermuten, denn einerseits spricht es selbst auf Schwingungen ultravioletten Lichtes sehr stark an,  $3 \times 10^{-2}$  Volumprozent

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 12. p. 732. 1903.

2) P. Lenard, Ann. d. Phys. 8. p. 187. 1902.

Ozon absorbieren auf 15 cm Länge  $\frac{1}{4}$  des bei meinen\* Versuchen angewendeten, lichtelektrisch wirksamen, ultravioletten Lichtes; daß aber andererseits die Elektronen auf dieselben ultravioletten Schwingungen ansprechen, zeigen die lichtelektrischen Erscheinungen. Es liegt also nahe zu vermuten, daß auch beide aufeinander ansprechen. Vielleicht könnte es sogar sein, daß das Ozon, wenn es dem Metall sehr nahe anliegt oder in dasselbe eindringt, die Schwingungen der Elektronen in denselben dämpft und dadurch auf die direkteste Weise die lichtelektrische Empfindlichkeit herabsetzt.

Hierdurch würde sich auch die p. 464 u. 465 erwähnte Tatsache, daß die Ermüdung von der Lichtsorte, mit welcher man mißt, stark abhängig ist, erklären. Licht, welches nur wenig ultraviolett ist, wird nur eine geringe Zahl der Elektronen, nur z. B. solche, die größte Schwingungsenergie haben, auslösen können. Geringe Verminderung der Schwingungsenergie wird die größte Zahl derselben unauslösbar machen, während dieselbe Energieeinbuße die Zahl der durch *stark* ultraviolettes Licht auslösbar Elektronen, die eben dafür nicht so große Schwingungsenergie zu haben brauchen, viel weniger prozentuell zu vermindern vermöchte.

Die entwickelte Anschauung würde auch, abgesehen von der Ermüdung, die Grunderscheinung der lichtelektrischen Entladung in einem ihrer auffälligsten Punkte erklären, nämlich ihrer verhältnismäßig geringen Stärke im Vergleich zu derjenigen, welche Hr. Lenard im äußersten Vakuum unter Anwendung aller Mittel zur Entfernung der Gasreste<sup>1)</sup> von der Platte erhielt. Er fand, daß von der im letzteren Fall im Vakuum ausgestrahlten Elektrizitätsmenge bei Atmosphärendruck und einem Feld von 83 Volt/cm nur  $\frac{1}{4}$  Proz., bei 2780 Volt/cm nur 4,7 Proz. herauskommen.<sup>2)</sup> Stoletow<sup>3)</sup> fand in einem Vakuum von 0,003 mm, wo die Stärke des lichtelektrischen Stromes wegen der mitwirkenden Ionisation durch Stoß nach den Versuchen von Lenard eher etwas größer ist

1) P. Lenard, Wiener Ber. 108. IIa. p. 1652 (§ 3). 1899; Ann. d. Phys. 2. p. 361 (§ 3). 1900.

2) P. Lenard, l. c. p. 1655, Tab. II bez. p. 365, Tab. II; vgl. auch Ann. d. Phys. 8. p. 196. 1902.

3) A. G. Stoletow, Journ. de Phys. (2) 9. p. 468. 1890.

als im absoluten Vakuum, diese bei einem Feld von etwa 240 Volt/cm nur 6 mal so stark wie bei Atmosphärendruck; Righi<sup>1)</sup> fand noch kleinere Verhältnisse. Die Verschiedenheit der genannten Ergebnisse würde sich nach dem obigen dadurch erklären, daß bei Stoletow und Righi die Elektrode Gase absorbiert enthielt, welche auch nach Herabgehen des Druckes auf 0,003 mm die aus einer gasfreien Elektrode, wie sie Hr. Lenard hatte, herausführbaren Elektronen größtenteils absorbierte. Andererseits hätte man das von dem letztgenannten untersuchte „normale“ Absinken des lichtelektrischen Stromes beim Übergang zum Atmosphärendruck auf Eindringen des Gases in die Platte und Bildung einer adhärierenden kondensierten Gasschicht größtenteils zurückzuführen. Ferner würde sich dadurch erklären, daß die Untersuchung der lichtelektrischen Empfindlichkeit in verschiedenen Gasen Widersprüche zwischen den Beobachtern geliefert hat. Versuche mit Wasserstoff, die während dieser Untersuchung angestellt und bei denen die Empfindlichkeiten unter öfteren Neufüllungen bestimmt wurden, ergaben Resultate, die keine schöne Übereinstimmung miteinander zeigten, so daß man nur oberflächliche Angaben darüber machen kann (vgl. p. 491). Da es offenbar darauf ankommt, daß die Oberfläche des Metalles selbst mit dem betreffenden Gas und nicht mit einem anderen gesättigt ist, müßten bei solchen Bestimmungen in der Art, wie es Hr. Lenard mit offenbarem Erfolg getan hat, zunächst die Platten von Gasresten befreit und erst dann die zu untersuchenden Gase eingelassen werden. Auch bei der Vergleichung verschiedener Metalle auf ihre lichtelektrische Empfindlichkeit müßten die Oberflächen, insofern man auf spezifische Metallkonstanten kommen will, möglichst von Gas befreit und müßte im Vakuum gearbeitet werden.

Die gewonnene Anschauung führt die Ermüdungen in und außerhalb der Gefäße, welche bei der Untersuchung zunächst getrennt behandelt werden müßten, schließlich auf dieselbe Grundwirkung, die Absorption der Elektronen durch Gase,

1) A. Righi, Mem. di Bologna (4) 10. (seduta 27. IV. 1890); La Lumière électrique 37. p. 654, zitiert nach einem kurzen Selbstreferat von Righi, Nuovo cimento 30. p. 198. 1891/92.



zurück, außerdem stellt sich letztere nur als ein auch beim lichtelektrischen Grundphänomen stets wesentlich beteiligter Faktor dar. Die dadurch gegebene Vereinfachung läßt die Erklärung an Halt gewinnen und liefert eine spezielle Anregung, sie bei den ferneren Untersuchungen der lichtelektrischen Erscheinungen zugrunde zu legen und ihre Weiterprüfung zu veranlassen.

Bezüglich der p. 509 erwähnten Formel würde unsere Anschauung darauf hinauslaufen, daß  $J$  die Größe ist, auf welche sich der Einfluß der im Oberflächengebiet kondensierten Gase erstreckt, wenigstens bei dem in der vorliegenden Untersuchung benutzten Größengebiet des Feldes. Für die Bildung von  $J$  käme dann nicht die Gesamtheit der aus dem gasfreien Metall herauszubringenden Elektronen in Betracht, sondern nur die aus der Absorptionsschicht herauskommenden. Man hätte so zwei Streckengebiete für die Erscheinung zu unterscheiden, denen sich nach außen hin als drittes dasjenige anschliesse, in welchem die den Rücktransport von Elektrizität nach der Ausgangsplatte bewirkenden Kräfte unmerklich geworden sind. Ein Wechsel des Gases allein in diesem dritten Gebiete würde den lichtelektrischen Strom nur unwesentlich beeinflussen.

Eine Nebenerscheinung, an deren weitere Bearbeitung ich bisher noch nicht herantreten konnte, möge noch Erwähnung finden. Platten, welche längere Zeit in einem Gefäße gelagert haben, ermüden, wenn man sie herausnimmt und vor der Lampe untersucht, schneller, sowohl wie eine außerhalb eines Gefäßes auf denselben Betrag gealterte, als auch wie eine ganz frisch polierte Platte. Bei gelegentlich nebenher gemachten Versuchen schien es so, als ob, im Gegensatz zu frischen oder offen gealterten, die Platten in diesem Fall tangential zum Lichte aufgehängt weniger ermüdeten, wie normal dazu. Eventuell handelt es sich also hier um eine Mitwirkung des Lichtes, die vielleicht in einer Ozonisierung der während der Lagerungsperiode im Gefäß aufgenommenen Luft bestehen könnte.

#### Schluß.

Weder die Korrosion der Oberfläche, noch das Licht oder andere Strahlungen, oder die Oxydation, noch auch elektrische



Ursachen, seien es Einflüsse auf das Medium oder Ausbildung von Doppelschichten, liefern die Erklärung der lichtelektrischen Ermüdung.

Die übrigens schwache Ermüdung in Gefäßen läßt sich auf die Vermehrung der Elektronenabsorption durch die Zunahme der Gasbeladung der Platten zurückführen. Die Wirkung des Ozons, welches im freien Raum die Hauptursache der dort stattfindenden, starken, lichtelektrischen Ermüdung bildet, beruht weder auf Oxydation noch auf Änderung des Kontaktpotentials. Sie läßt sich analog wie die Gefäßermüdung auf Elektronenabsorption in der Gasbeladung der Platten zurückführen, wenn man die aus verschiedenen angegebenen Gründen naheliegende Annahme macht, daß dem Ozon ein hervorragender Einfluß auf die Elektronenbewegung zukommt (starke Absorption langsamer Elektronen, eventuell Verminderung ihrer Schwingungsenergie im Metall).

Das zur Untersuchung kleinster Mengen, z. B. in der Radioaktivität erprobte Elektroskop liefert auf dem Wege über die lichtelektrische Ermüdung, wie schon in der früheren Arbeit erwähnt, ein Mittel zum Studium langsamer Oberflächenänderungen und möchte insbesondere auf diese Weise einen Zugang zur Untersuchung sich ausbildender, geringerer Gasbeladungen ergeben.

Auch bei der Ausbildung der Kontaktpotentiale möchten vielleicht vom aufgenommenen Gase absorbierte, aus den Substanzen heraus diffundierte Elektronen eine wesentliche Rolle spielen. Diese Vermutung haben die Versuche der vorliegenden Arbeit bei mir bestärkt, die Verfolgung derselben dürfte, wie mir scheint, durch den Versuch entscheidbare Fragen über die Ausbildung der Kontaktpotentiale an die Hand geben und so vielleicht die Lösung dieses alten Problems weiter zu fördern vermögen.<sup>1)</sup>

Dresden, Physik. Institut der Techn. Hochschule.

1) Die Angaben über die lichtelektrische Ermüdung in einigen Gesamtdarstellungen sollten einer Revision unterzogen werden. p. 489 bis 490 wurde schon erwähnt, daß die am dort zitierten Ort vorkommende Angabe, im Wasserstoff finde keine Ermüdung statt, nicht zutrifft. Dasselbe gilt für die am gleichen Ort stehende Angabe, daß Pt keine Ermüdung zeige. Zwar ermüdet Pt nicht so schnell wie Zn unter

gleichen Verhältnissen, aber doch so, daß ich diese Ermüdung bei einem großen Teil meiner Versuche benutzen konnte. Ebenso ist es unzutreffend, daß das Ermüden wahrscheinlich einer Oxydation zuzuschreiben sei, ein Schluß, der sich am zitierten Ort wesentlich auf die beiden gerade erwähnten irrtümlichen Angaben gründet. Gerade bei einem Buche von so hohem Rang wie das Thomsonsche (Marx) ist der Wunsch, gelegentliche Irrtümer beseitigt zu sehen, besonders lebhaft. Auch die Angaben über die lichtelektrische Ermüdung in Winkelmanns Handbuch, 2. Aufl., 4. p. 487—489, führen zu einem unzutreffenden Urteil. Z. B. heißt es: „Metallflächen, welche durch Liegen an der Luft sich mit einer dünnen Oxydschicht bedeckt haben, sind ebenfalls wenig wirksam.“ Metallflächen, welche längere Zeit an der Luft gelegen haben, sind zwar wenig wirksam, aber Metallflächen, welche lediglich mit einer dünnen Oxydschicht bedeckt sind, sind meist recht wirksam. Namentlich von  $\text{CuO}$  ist dies schon sehr lange bekannt und auch für  $\text{PbO}$ , habe ich es früher gelegentlich gefunden. Vielleicht darf ich die Gelegenheit benutzen, um den Wunsch auszusprechen, es möchten die einzelnen Angaben durch direkt beigegebene Zitate, Einzelzitate, belegt werden. Die Brauchbarkeit für den arbeitenden Physiker wird hierdurch doch wesentlich mitbestimmt, Aufführen der gesamten Literatur über einen Gegenstand hilft bei der Prüfung der Angaben auf ihre Richtigkeit, zu der man doch verpflichtet ist, nicht genügend.

(Eingegangen 29. Mai 1907.)

*Anmerkung bei der Korrektur.* Für die Zurückführung der Ermüdung auf die Gasabsorption liefert eine inzwischen erschienene Arbeit von Hrn. Bergwitz (Phys. Zeitschr. 8. p. 378. 1907) eine weitere wertvolle Stütze. Er zeigt, daß in Elster-Geitel'schen Vakuumzellen keine Ermüdung eintritt. Bis zu gewissem Grad war dies zwar schon bekannt, aber noch nicht durch besondere Versuche nachgewiesen. Allerdings betragen die längsten Ermüdungsperioden bei Hrn. Bergwitz, soviel sich aus der Arbeit ersehen läßt, nur 3 Stunden, so daß es wünschenswert bleibt, dieselben zu verlängern.

**7. Wann und auf welchem Wege beeinflussen  
suspendierte Teilchen Gewicht und Auftrieb einer  
Flüssigkeit?  
von Bernhard Löffler.**

(Auszug aus der Marburger Dissertation 1906.)

**I. Grundlegende Erörterungen.**

Die Frage nach dem Einfluß suspendierter Teilchen auf den Auftrieb einer Flüssigkeit ist zum ersten Male im Jahre 1847 durch Brücke<sup>1)</sup> bei Gelegenheit der Untersuchung des spezifischen Gewichtes der Milch mit Hilfe des Aräometers angeregt worden. Brücke nimmt als selbstverständlich an, daß zwischen den Angaben des Pyknometers und des Aräometers Unterschiede bestehen, wenn sie auch nach seiner Meinung vielleicht nicht groß genug sind, um mit Sicherheit wahrgenommen zu werden. Nach seiner Ansicht wirken die suspendierten Körperchen nicht auf das Aräometer. Die Frage blieb unentschieden, bis sie im Jahre 1865 von Camillo Bondy und E. Mach<sup>2)</sup> wieder aufgenommen wurde. Bondy fand experimentell, daß suspendierte Teilchen einen ziemlich bedeutenden Einfluß auf die Aräometerangabe hatten.

Die Frage: „Wie hängt die Wirkung der Körper auf das Aräometer von der Feinheit der Verteilung ab?“ hat er experimentell nicht gelöst. Diese Frage hat zunächst Hr. K. v. Plessen in seiner Greifswalder Doktorarbeit<sup>3)</sup> untersucht, deren Resultate kurz angegeben werden sollen:

K. v. Plessen stellte sich Suspensionen von verschiedener Feinheit her, vornehmlich durch Fällung von Baryumsulfat bei verschiedenen Temperaturen. Eine solche Fällung erhält man beim Zusammengießen wässriger Lösung von Chlorbaryum mit Natriumsulfat. Und zwar werden bei gewöhnlicher Tem-

1) Brücke, Müllers Arch. p. 409. 1847.

2) Camillo Bondy u. E. Mach, Pogg. Ann. 126. p. 314—380. 1865.

3) Karl v. Plessen, Inauguraldissertation, Greifswald 1901, bei F. W. Kunicke.

peratur, die aber durch die Reaktionswärme steigt, gröbere Teilchen in Suspension abgeschieden, feinere Teilchen dagegen bei niedrigerer Temperatur, welche durch Vorkühlen der Lösungen mit Kältemischung auch bei der Reaktion erhalten bleiben kann. Hr. v. Plessen konstatierte, daß, je feiner die Teilchen waren, diese um so vollkommener wirkten in Bezug auf Bodendruck (Pyknometer) und Auftrieb (Aräometer), so, als ob sie gelöst wären. Und zwar ergaben sich die Werte des spezifischen Gewichtes für eine bestimmte Suspension, in beiderlei Weise ermittelt, fast stets sehr nahe einander gleich. Etwas höhere Werte als das Aräometer gibt das Pyknometer nur bei den allergrößten Suspensionen, die sich sehr schnell setzten.

Die Ansicht, die Bondy sich von der Wirkung der suspendierten Teilchen gebildet hatte, führte ihn zu dem Ausspruch: „Fein und gleichförmig verteilte in einer Flüssigkeit suspendierte Teilchen affizieren das nach irgend einer Methode bestimmte spezifische Gewicht und den Auftrieb desto mehr in derselben Weise wie gelöste Körper, je langsamer sie in der Flüssigkeit fallen oder steigen.“ — Er ist also der Ansicht, daß die Einwirkung auf den Auftrieb von dem Mangel an Geschwindigkeit der suspendierten Partikelchen abhängt. Sein Lehrer Ernst Mach weist dagegen in seinen Bemerkungen zu Bondys Arbeit darauf hin, daß es auf die vernichtete Beschleunigung ankomme in umgekehrter Anwendung des Prinzipes: „ein fallender Körper ist nicht schwer“. Indem wir vorläufig die zu ihr erforderliche Ergänzung, wie sie sich uns ergeben hat, zur Besprechung im III. Teile aufheben, wollen wir zunächst das Prinzip von Machs Erklärung näher ausführen.

Wir wollen unter „Gewicht“ den Druck verstehen, den ein Körper auf eine Unterlage ausübt, oder den Zug, mit dem er einen Faden spannen würde. Es ist also Gewicht hier in demselben Sinne zu nehmen, wie bei dem Archimedischen Prinzip. In diesem Sinne verliert ein fallender Körper um so mehr von seinem Gewicht, je mehr sich seine Beschleunigung der des freien Falles nähert. Fällt der Körper mit *dieser* Beschleunigung, so verliert er sein ganzes Gewicht. Fällt er mit konstanter Geschwindigkeit, so drückt er mit seinem vollen Gewicht auf die Unterlage, er wiegt dann also gerade so viel wie im Zustand der Ruhe. Fällt er mit Verzögerung, so wird

er stärker auf die Unterlage drücken, also mehr wiegen als im Zustand der Ruhe.

Eine neue Demonstrationsvorrichtung für dieses Prinzip, die zugleich die Verhältnisse bei suspendierten Teilchen nachahmt, ist folgende: Sie besteht aus einer an einem Kautschukfaden aufgehängten etwa 2 m langen Stange, an der ein Messingstück hinabgleitet. Je nach der Größe der Reibung, die durch eine schleifende Feder reguliert werden kann, fällt das Messingstück mit oder ohne Beschleunigung. Vor Beginn des Versuches ist das Messingstück durch einen Bindfaden am oberen Ende der Stange befestigt. Dann wird der Bindfaden durchgebrannt. Fällt nun das Messingstück mit starker Reibung, also mit nahezu konstanter Geschwindigkeit, so bleibt die Stange in Ruhe. Fällt es bei geringer Reibung, also mit Beschleunigung, so bewegt sich die Stange aufwärts, im Sinne einer Gewichtsverminderung. Noch vollständiger gleicht folgende auf Vorschlag von Dr. M. Seddig durch Institutsmechaniker P. Görs ausgeführte Anordnung den sich setzenden Teilchen. Einen Messingzylinder etwa von der Größe eines Fingers kann man in derselben Weise fallen lassen in einer nur etwas weiteren 2 m langen Glasröhre. Diese ist einmal mit Wasser gefüllt: dann wägt der fallende Zylinder mit; ein zweites Mal ist sie mit Luft gefüllt: dann wägt er während des Falles fast gar nicht mit. Beim letzteren Versuch kann die Röhre unten offen bleiben, um den störenden Aufprall auf den Boden zu vermeiden.

Ganz analog dem Gleitstück bez. dem Fallzylinder verhalten sich in einer Flüssigkeit suspendierte Teilchen. Die Reibung an der Flüssigkeit verhindert sie, mit voller Schwerebeschleunigung zu fallen. Entsprechend dem Beschleunigungsmanko üben die Teilchen auf die Flüssigkeit einen Druck aus. Dieser Druck muß sich sowohl auf den Boden des Gefäßes, wie auch auf hineintauchende Schwimmkörper übertragen.

*Die suspendierten Partikelchen werden dann mit ihrer vollen Schwere auf die Flüssigkeit drücken, also „Gewicht“ der Flüssigkeit (d. h. ihren Bodendruck) und Auftrieb dann am vollkommensten beeinflussen, wenn die gesamte Beschleunigung der Teilchen durch die Reibung an der Flüssigkeit aufgezehrt ist, d. h. wenn die Teilchen mit konstanter Geschwindigkeit fallen.*

Ein Unterschied in den Angaben des Aräometers und des

Pyknometers sollte also gar nicht vorkommen. Wenn Hr. v. Plessen, wie oben erwähnt, doch einen solchen fand bei den größten Suspensionen, so setzten sich letztere außerordentlich schnell. Bis zur ersten Ablesung am Aräometer waren bereits Teilchen zu Boden gesunken, während sich auch schon von der Oberfläche her eine klare Schicht bildete. Für den Bodendruck muß dies ohne Einfluß gewesen sein; das Aräometer muß dann aber in der Tat ein etwas niedrigeres spezifisches Gewicht angeben. Von einem solchen, nur bei den allergößten Suspensionen vorkommenden Ausnahmefall soll im folgenden stets abgesehen werden.

Nach Machs einleuchtender Betrachtungsweise der Wirkung suspendierter Teilchen wird man nicht mehr im Zweifel sein, daß in der Tat die Beschleunigungsverminderung die Hauptsache für die Druckwirkung am Teilchen ist. Es drängen sich dann aber auch sogleich zwei Schlußfolgerungen aus dieser Betrachtung auf. Erstens wird dem Fallen der Teilchen mit konstanter Geschwindigkeit eine kurze Epoche der Beschleunigung vorausgehen, etwa nach frischem Aufrühren der Suspension; in dieser Beschleunigungsepoche muß die Suspension leichter erscheinen als später, wenn die Teilchen sich mit konstanter Geschwindigkeit setzen. Zweitens kommen die Teilchen mit einer gewissen, wenn auch sehr kleinen Geschwindigkeit am Boden an; sie stoßen gegen den Boden und müssen dadurch eine Gewichtsvermehrung erzeugen. Ob beide Einflüsse meßbar sind, und wann, ist von vornherein fraglich. Es ist aber von der größten Wichtigkeit, sie ins Auge zu fassen; denn sie können Gewichtsänderungen ein und derselben Gesamtmasse erzeugen. Es ist daher im Folgenden zunächst versucht worden, solche Einflüsse nachzuweisen.

## II. Versuche über Gewichtsänderung von Körpern, die mit Reibung fallen.

### 1. Versuche an Suspensionen.

Die Gewichtsverminderung unmittelbar nach dem Aufschütteln einer Suspension wird durch den zweiten der eben erwähnten Einflüsse verstärkt werden; denn auch die Teilchen, die den Boden erreichen, werden während jener Beschleunigungs-



epoche noch nicht mit voller Endgeschwindigkeit aufprallen. Es war also nicht von vornherein aussichtslos, diese Gewichtsverminderung nachweisen zu können. Zur Ermittlung der günstigsten Bedingungen stellte Hr. K. v. Plessen weiterhin Versuche über Geschwindigkeit und Beschleunigung beim Setzen der Suspensionen an (Dissertation p. 10 bis 26). Die wesentlichen Versuche wurden angestellt durch beständige wägende Verfolgung des kontinuierlich anwachsenden Bodensatzes, indem dieser sich direkt auf eine Platte niederschlug, die an dem einen Arm einer nicht arretierten Wage hing. Inwieweit unter diesen Umständen die augenblickliche Lage der Wage der im gleichen Augenblick vorhandenen Belastung entspricht, ergibt eine theoretische Ableitung, die Hr. Prof. Richarz Hr. v. Plessen zur Verfügung stellte (dessen Dissertation p. 13 bis 19), bei welcher die auftretende Differentialgleichung mit Hilfe eines Integralen ähnlich dem Fourierschen gelöst wird. Hr. v. Plessen ermittelte durch seine Versuche, bei welchen Suspensionen die Epoche der Beschleunigung nach dem Aufrühren am längsten dauerte. Ich habe vergeblich versucht, bei eben denselben einen Gewichtsverlust in dieser Epoche zu konstatieren. Dabei stand mir eine Bungesche Wage zur Verfügung, die auf 150 g Belastung noch 0,02 mg angibt. Ein überschläglicher Vergleich mit den im folgenden Abschnitt berichteten geringen, aber noch nachweisbaren Wirkungen läßt dies negative Resultat in der Tat erwarten. Vielleicht wird man mit sehr viel empfindlicheren Wagen aber auch diese Gewichtsverminderung von Suspensionen nach dem Aufschütteln nachweisen können.

2. Versuche mit einem einzelnen in einer Flüssigkeit fallenden Körper.

Eine Möglichkeit, ein Analogon zu einer sich setzenden Suspension herzustellen, bei welchem die Beschleunigungsdifferenzen und damit die Gewichts-differenzen stärker sein mußten, war, statt relativ leichter Teilchen *einen schweren Körper* zu nehmen, ihn durch starke Reibung zu langsamem Fall zu zwingen und dann während des Fallens durch Änderung der Reibung Beschleunigung oder Verzögerung zu bewirken.

Zu diesem Zweck benutzte ich eine Versuchsanordnung,



der sich schon Hr. F. E. Wolff bei früheren Versuchen, die er als Privatassistent von Prof. Richarz anstellte, bedient hat.

Eine Glasröhre von 14,5 cm Höhe und ungefähr 1,3 cm Durchmesser wurde mit destilliertem Wasser gefüllt.

In diese Glasröhre war ein massiver zylindrischer Messingkörper von 28,5 g Gewicht eingepaßt. Oben und unten war die Glasröhre dicht verschlossen, und zwar so, daß sich innerhalb der Glasröhre keine Luftblase mehr befand. Zum Durchfallen dieser Glasröhre brauchte der Messingkörper ungefähr eine Minute. Am oberen Ende war die Glasröhre so eng, daß der Messingkörper genau hineinpaßte; die Reibung war daher außerordentlich groß, weshalb der Messingkörper anfangs nur mit ganz geringer Beschleunigung fiel. Etwas unterhalb der Mitte war die Glasröhre ein wenig weiter, so daß der Messingkörper nun plötzlich eine bedeutend größere Beschleunigung erhielt. Da die Röhre nach unten nicht mehr schmaler wurde, so war der Messingkörper nach Passieren der Erweiterung bald unten angelangt. Die Glasröhre wurde an der Wage aufgehängt, gewartet, bis alle Luftströmungen, die durch Öffnen der Seitentüren des Wagekastens und durch Erwärmen entstanden waren, sich ausgeglichen hatten, dann endgültig äquilibriert. Vermittelt eines besonderen Mechanismus wurde ohne Öffnen der Türen des Wagekastens die Glasröhre von der Wageschale abgehoben, um  $180^\circ$  gedreht, bis der Messingbolzen die Röhre durchfallen hatte, dann wieder in der ursprünglichen Stellung an der Wageschale aufgehängt und jetzt die Arretierung sofort gelöst. Während des Fallens des Bolzens konnte dann eine Reihe von Umkehrpunkten der Wage abgelesen und das Gewicht berechnet werden.

Es ist bereits erwähnt, daß der Messingbolzen von Anfang an schon vor der erweiterten Stelle in der Glasröhre mit geringer Beschleunigung fällt; wie zu erwarten, zeigen die Versuche, daß der ganze Apparat während dieser Zeit leichter ist als im Zustand der Ruhe nach dem Auftreffen des Messingbolzens. Die Gewichtsverminderung beträgt 0,14 mg. *Außer dieser tritt aber mit voller Regelmäßigkeit ein stärkerer Gewichtsverlust auf, den der Messingbolzen nach Passieren der Erweiterung erleidet, d. h. während der Zeit, in der er mit vermehrter Beschleunigung fällt, und zwar im Betrage von etwa 0,2 mg.*

Der Augenblick des Aufschlagens des Bolzens auf den Boden ergab dann noch eine momentane Gewichtsvermehrung. Bei einer zweiten Versuchsreihe wurde eine Glasröhre von 17,5 cm Länge und 1,3 cm Durchmesser benutzt, die oben etwas weiter, wenig unterhalb der Mitte dagegen enger war. In der oberen Hälfte der Glasröhre fiel der Messingbolzen daher ziemlich schnell, wurde dann aber in der Mitte plötzlich gehemmt und fiel nun ganz langsam mit immer größer werdender Reibung, so daß dann auch der Anprall auf dem Boden viel geringer war als in der vorigen Versuchsreihe.

Diese Versuche zeigen, daß der Messingkörper schwerer wird in demselben Augenblick, in dem eine plötzliche Abnahme seiner Geschwindigkeit eintritt.

Da der Messingkörper zu Beginn eines jeden dieser zweiten Versuche mit geringer Verzögerung fällt, so ist der ganze Apparat während dieser Zeit etwas schwerer als im Zustand der Ruhe nach dem Auftreffen des Messingbolzens.

Die Gewichtsvermehrung bez. -verminderung durch Beschleunigungsverminderung bez. -vermehrung war bei diesem relativ schweren „sich setzenden“ suspendierten Messingbolzen nur gering, aber doch noch nachweisbar. Der Vergleich mit den Suspensionen läßt sofort erkennen, daß mit der zur Verfügung stehenden Wage an ihnen keine Gewichts differenzen konstatierbar sein konnten.

### 3. Gewichtsänderung von „Sanduhren“ während des Fallens der Sandteilchen.

Zu den nun folgenden Berechnungen und Versuchen führte die Überlegung, man müsse die Reibung der sich setzenden Suspension stark verringern, um eine größere Beschleunigung im Fallen der suspendierten Teilchen und dadurch einen erheblicheren Gewichtsverlust zu erzielen, der mit unserer Wage noch meßbar wäre. Als extremen Fall kann man sich dann ein Fallen von Teilchen in Luft denken: eine „Sanduhr“. Die im Fallen begriffenen Teilchen werden nicht mitwiegen, wenn sie die volle Schwerebeschleunigung haben; fallen sie mit Reibung, so wird ein Teil der Beschleunigung aufgezehrt; es findet dann Druckübertragung durch Vermittelung der Luft statt; die Teilchen werden in diesem Falle mitwiegen, aller-

dings nicht mit ihrem vollen Gewicht. Andererseits ist zu berücksichtigen, daß die auf den Boden der Sanduhr auftreffenden Teilchen durch ihren Stoß so wirken wie eine Gewichtsvermehrung.

Man kann den Extremwert der Gewichtsverminderung während des Fallens der Teilchen, wenn es mit Beschleunigung geschieht, berechnen, ebenso den Extremwert der Gewichtsvermehrung durch den Aufprall der Teilchen auf den Boden. Welcher von beiden Einflüssen überwiegt, hängt von der Größe der Reibung ab. Diese Überlegungen konnten experimentell geprüft werden an verschiedenen Glasapparaten, die hohen Sanduhren ähnlich waren. Dabei fanden sich alle Möglichkeiten auch in der Tat bei einer oder der anderen der „Sanduhren“ verwirklicht, und die Resultate lagen auch der Größe nach innerhalb der berechneten Grenzen. Eine erste Gruppe von Versuchen wurde dabei einfach mit luftgefüllten „Sanduhren“ angestellt, weiter dann aber auch Versuche an ein und derselben „Sanduhr“ zuerst in luftgefülltem, dann in evakuiertem Zustände. Dabei ergaben sich in beiden Zuständen dieselben Resultate für die auftretenden Gewichtsänderungen während des Fallens der Sandteilchen, was auf den ersten Blick verwunderlich erscheinen kann. Indessen ist ja aber nach unserer Auffassung die Reibung das Wesentliche. Diese ist für Gase jedoch nach Kundt und Warburg<sup>1)</sup> bis zu sehr kleinen Drucken von letzteren unabhängig, so daß hiernach jenes Resultat vielmehr eine Bestätigung unserer Auffassung liefert.

Wenn aber eine der „Sanduhren“ mit Wasser statt mit Luft gefüllt wurde, ergaben sich fast ganz dieselben Verhältnisse wie bei einer sich setzenden Suspension; ein Gewichtsunterschied bei ruhendem und bei fallendem Sand ist nicht mehr vorhanden; die Teilchen drücken also infolge vollständig aufgezehrter Beschleunigung mit ihrem vollen Gewicht.

Die theoretischen Überlegungen über „Sanduhren“ und eine kurze Darstellung dieser Versuche hat Hr. F. Richarz an anderem Orte gebracht.<sup>2)</sup>

1) A. Kundt u. E. Warburg, Pogg. Ann. 155. p. 337 u. 525. 1875.

2) F. Richarz, Sitz.-Ber. d. Marburger Gesellsch. vom 8. Mai 1907.

Somit haben wir durch die im Vorstehenden erwähnten Versuche mit dem in Wasser fallenden Messingbolzen und den luft- bez. wassergefüllten Sanduhren eine vollständige Bestätigung der Vorstellung gewonnen, daß bei sich setzenden Suspensionen die Teilchen soweit und deswegen ihren Gewichtsdruck auf die Flüssigkeit übertragen, als ihre Beschleunigung durch die Reibung der Flüssigkeit aufgezehrt wird.

Wenn man sich nun weiter fragt, wie man sich die Übertragung des Gewichtsdruckes der suspendierten Teilchen durch die Flüssigkeit hindurch auf den Boden vorzustellen habe, so könnte man sich zunächst folgende hydrostatische Erklärung machen. Durch jenen Gewichtsdruck wird die Flüssigkeit komprimiert, wenn auch äußerst wenig; aber um gerade so viel, daß der komprimierende Druck auch wieder auf den Boden ausgeübt wird. Dieselbe Vorstellung der Druckübertragung kann auch angewendet werden auf den Auftrieb, den ein Schwimmkörper erfährt. Indessen führt für letzteren Fall eine hydrodynamische Auffassung anschaulicher zum Verständnis, und zwar nicht nur des Einflusses suspendierter Teilchen auf den Auftrieb, sondern allgemeiner des Einflusses von einem bewegten Körper auf einen anderen ruhenden in einer reibenden Flüssigkeit.

**III. Auf welche Weise vollziehen Körper, die in einer Flüssigkeit sich mit großer Reibung bewegen, ihren Einfluß auf den Auftrieb?**

Der durch Reibung verursachte Mangel an Beschleunigung genügt nicht zur vollen Erklärung des Zustandekommens der Auftriebs- und Bodendruckbeeinflussung. Es muß noch eine übrigbleibende Bewegung der Teilchen vorhanden sein. Würden die Teilchen sich überhaupt nicht in der Flüssigkeit bewegen, so ist das nur dann denkbar, wenn das spezifische Gewicht des Suspensionsmittels gleich dem spezifischen Gewicht der suspendierten Substanz ist; dann wird natürlich keine Einwirkung der suspendierten Teilchen auf den Auftrieb der Flüssigkeit stattfinden. Damit eine Einwirkung auf den Auftrieb stattfindet, muß vielmehr Geschwindigkeit vorhanden sein, mit der die Teilchen in der Flüssigkeit fallen. Die Einwirkung der suspendierten Teilchen auf den Auftrieb und

Bodendruck ist also nicht nur von einem Defizit an Beschleunigung, sondern auch von einer vorhandenen Geschwindigkeit abhängig. Ein Unterschied in der Wirkungsweise auf Bodendruck und Auftrieb ist nicht anzunehmen. Der Einfluß der Beschleunigung ist besser nachweisbar beim Bodendruck, der Mechanismus der Übertragung und die Bedeutung der Geschwindigkeit für ihn sind besser zu ersehen aus den folgenden Versuchen über die Änderung des Auftriebes.

### 1. Versuche mit einem sich bewegenden Körper.

Wenn die Erklärung richtig ist, wonach die suspendierten Teilchen durch das Fallen mit großer Reibung auf die Flüssigkeit einen Druck ausüben und dadurch sowohl auf Gewicht wie auf den Auftrieb der Flüssigkeit wirken, so ist zu erwarten, daß auch ein einzelner, mit großer Reibung in Wasser fallender Körper, wenn auch nicht stationär, so doch stoßweise den Auftrieb erhöht. Zugleich gelangen wir durch die Betrachtung dieses Falles zu dem Verständnis, wie überhaupt die fallenden Teilchen einer Suspension ihre Wirkung auf den Auftrieb bewerkstelligen.

Ein diesbezüglicher Versuch des Hrn. K. v. Plessen<sup>1)</sup> wurde wiederholt und erweitert.

Zu diesem Zweck wurde die zu den bisherigen Versuchen benutzte feine Bunge-sche Wage umgebaut in einer Weise, die fast ohne Erläuterung aus Fig. 1 verständlich ist.

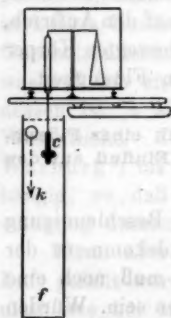


Fig. 1.

An dem einen Gehänge hing der Senkkörper  $c$  in Wasser hinein. Der Wasserbehälter  $f$  war 95 cm hoch, 20 cm breit und 30 cm lang. Durch ein seitliches Fenster war es möglich, zu kontrollieren, ob die fallende Kugel in der richtigen Entfernung vom Senkkörper vorbeifiel.

Als Fallkörper  $k$  wurde ein ausgehöhlter Kork benutzt, der mit Eisenstückchen gefüllt und mit Filz umwickelt war, so daß das Ganze eine Kugel von 6,5 cm Durchmesser bildete.

1) K. v. Plessen, Greifswalder Dissertation. p. 37. 1901.

Mittels eines Drahtes und eines Hakens konnte der Fallkörper an einem quer über die Öffnung des Wasserbehälters gespannten Bindfaden aufgehängt werden. An einem zweiten Haken an der Kugel konnte man Drahtstücke beliebig aufhängen, wodurch das Gewicht der Kugel, die, unbeschwert, in Wasser emporstieg, vergrößert werden konnte.

Bei den verschiedenen Versuchen hing der Senkkörper bald in der oberen Hälfte des Wasserbehälters (vgl. Fig. 1), bald in der unteren, bald in der Mitte. Da bei diesen Versuchen die Ausschläge oft so groß waren, daß zu befürchten war, die beiden Enden des Wagebalkens würden an die Arretierungsvorrichtung anstoßen, wurde eine Flüssigkeitsdämpfung an der rechten Wageschale angebracht.

Nachdem der Fallkörper an dem Bindfaden aufgehängt und das Wasser in dem Behälter vollständig zur Ruhe gekommen war, wurde die Arretierung der Wage gelöst und äquilibriert. Dann wurde der Bindfaden durchgeschnitten; der Körper fiel in einem Abstand von 17 cm am Senkkörper vorbei; der Zeiger der Wage bewegte sich sofort nach dem Durchschneiden des Bindfadens langsam im Sinne einer Gewichtsverminderung des Senkkörpers und gab dann einen großen ebenso gerichteten Ausschlag in dem Augenblick, als die fallende Kugel an dem Senkkörper vorbeifuhr; die Wage ging auf die ursprüngliche Einstellung zurück, nachdem der Körper am Boden angelangt und das Wasser wieder zur Ruhe gekommen war.

Diese oft wiederholten Versuche zeigen also, daß der Auftrieb auch durch einen einzelnen mit genügend großer Reibung fallenden Körper vergrößert wird. Die Größe der Wirkung wächst mit der Geschwindigkeit, welche die fallende Kugel beim Vorbeigehen am Senkkörper erlangt hat. Dies wurde nachgewiesen durch eine Reihe von Versuchen, bei denen in der beschriebenen Weise das Gewicht des Fallkörpers so variiert wurde, daß die Fallzeit bis zum Boden sich zwischen 12,2 und 2,6 Sek. änderte.

Es liegt nun die Frage nahe: wird der Auftrieb verringert, wenn die Kugel emporsteigt?

Um dies zu untersuchen, wurde das Gewicht der Kugel durch Wegnahme einiger der erwähnten Beschwerungsstücke



so lange vermindert, bis sie im Wasser langsam emporstieg. Der Wasserbehälter wurde hohl gestellt, so daß ein Elektromagnet unter dem Boden die Kugel bis zum Versuch festhalten konnte. Wie erwartet, wurde der Senkkörper scheinbar schwerer, sobald die emporsteigende Kugel an ihm vorbeipassierte. *Durch die emporsteigende Kugel wird also der Auftrieb verringert.* Die Größe dieser Verringerung hängt, wie die Versuche ebenfalls erkennen lassen, von der im Augenblick des Vorbeiganges der Kugel am Senkkörper erlangten Geschwindigkeit der ersteren ab.

Versuche mit einer fallenden, an der Stelle des Senkkörpers durchlochenden Platte oder einem ebensolchen Sieb hatten, abgesehen von Komplikationen, dieselben Resultate.

## 2. Erklärung dieser Versuche.

*Wie sind die Veränderungen des Auftriebes bei der Bewegung der Kugel in der Flüssigkeit zu erklären?* Hydrodynamisch, durch das Auftreffen der Stromlinien der Flüssigkeit auf den Senkkörper und Mitnahme desselben infolge der Reibung.

Der Verlauf der Stromlinien für den Fall, daß eine Kugel sich in einer Flüssigkeit gleichförmig bewegt, läßt sich ableiten in weiterer Verfolgung der Entwicklungen Kirchhoffs in seinen Vorlesungen über Mechanik, 18. Vorlesung, § 3. p. 222. 2. Aufl. Diese Ausführung, die mir Hr. Prof. Richarz zur Verfügung gestellt hat, habe ich in meiner Dissertation auf p. 77—84 gebracht. Das Resultat ergibt Kurven, die außer den physikalischen Stromlinien in der Flüssigkeit auch deren analytische Fortsetzungen im Inneren der Kugel darstellen. Die letztere ist in Fig. 2 als Kreis um den Mittelpunkt der ganzen Zeichnung angegeben,  $z$  als ihre Bewegungsrichtung. Die Stromlinien sind Kreisen ähnlich, deren Mittelpunkte auf der  $\pm \rho$ -Achse liegen, und die alle durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, die aber in der  $z$ -Richtung etwas zusammengedrückt sind. Im wesentlichen wird der Verlauf der Stromlinien auch derselbe sein, wenn der Senkkörper  $c$  in der Flüssigkeit hängt. Auf ihn treffen dann die Stromlinien von unten her, gehen um ihn herum und treiben ihn vermöge der Reibung in die Höhe, wodurch der Auftrieb scheinbar ver-



größert wird. Dies gilt aber nur für die Zeit des Vorbeigehens der Kugel am Senkkörper und später. Denn solange der Senkkörper sich noch unterhalb der fallenden Kugel be-

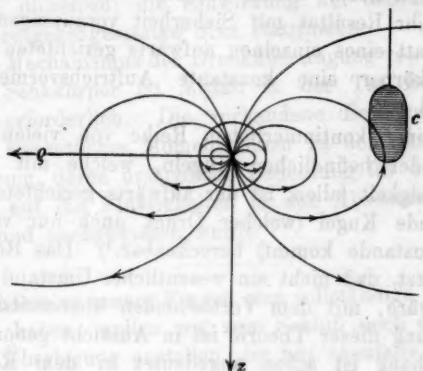


Fig. 2.

findet, kann er von oben her durch Stromlinien getroffen werden, die eine Wirkung im entgegengesetzten Sinn hervorrufen würden.

Nun ist aber die Dichtigkeit der Stromlinien nahe an der sich bewegenden Kugel größer, als in weiterer Entfernung von ihr. Infolgedessen ist für die Gesamtwirkung der sich bewegenden Kugel auf den Senkkörper maßgebend die Wirkung um die Zeit des Vorbeigehens bei größter Annäherung beider. Aus demselben Grunde treffen auch die vorstehenden Überlegungen zu, obwohl die Stromlinien nur für einen Augenblick gelten; sie wandern mit der Kugel. Die *Bahnen* sind andere und müßten nach der Lagrangeschen Hydrodynamik ermittelt werden.<sup>1)</sup>

Wenn wir uns zum Schlusse fragen: Wieweit stimmt die Analogie einer fallenden Kugel mit einer sich setzenden Suspension, so ist zu bemerken: Alles Nichtstationäre in der Erscheinung ist nur ein hinkender Vergleich mit den Suspen-

1) Man vgl. V. Bjerknes, Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte. p. 51. Leipzig 1900.

sionen. Die durch *eine* fallende Kugel erzielte momentane Änderung des Auftriebes könnte aber annähernd stationär gemacht werden dadurch, daß man schnell wiederholt einzelne Kugeln fallen ließe. Solche Versuche wurden nicht ausgeführt, weil sich ihr Resultat mit Sicherheit voraussagen läßt, daß nämlich statt eines einzelnen aufwärts gerichteten Stoßes auf den Senkkörper eine konstante Auftriebsvermehrung eintreten muß.

Bei einer kontinuierlichen Reihe von vielen über- und nebeneinander befindlichen Kugeln, welche mit Reibung in einer Flüssigkeit fallen, ist der aufwärts gerichtete Druck auf eine ruhende Kugel (welcher Druck auch nur vermöge der Reibung zustande kommt) berechenbar.<sup>1)</sup> Das Resultat *muß*, vorausgesetzt, daß nicht ein wesentlicher Umstand außer acht gelassen wäre, mit dem Vorstehenden übereinstimmen. Die Durchführung dieser Theorie ist in Aussicht genommen. Ein Zusammenhang ist schon angedeutet in dem Resultat von Einstein<sup>2)</sup>, daß die innere Reibung einer Flüssigkeit abhängig ist von dem Vorhandensein suspendierter Teilchen.

### 3. Schluß auf Suspensionen.

Wir wollen nun die durch diese Versuche gelieferte Erkenntnis dazu benutzen, die Art und Weise des Zustandekommens der *Einwirkung suspendierter Teilchen auf den Auftrieb zu erklären*:

Die einzelnen Teilchen fallen langsam und mit großer Reibung in der Flüssigkeit; sie drücken dadurch auf das darunter befindliche Suspensionsmittel, das durch die Zwischenräume, die die Teilchen zwischen sich lassen, auszuweichen sucht. Es entsteht dabei in der Flüssigkeit eine kontinuierliche Strömung nach oben, die vermöge der Reibung das Aräometer erfaßt und dauernd in die Höhe drückt, so daß es

1) Lamb-Reiff, Einleitung in die Hydrodynamik. p. 317 bez. 320 ff.

2) A. Einstein, Ann. d. Phys. 19. p. 300. 1906: „Werden in einer Flüssigkeit sehr kleine starre Kugeln suspendiert, so wächst dadurch der Koeffizient der inneren Reibung um einen Bruchteil, der gleich ist dem Gesamtvolumen der in der Volumeinheit suspendierten Kugeln, vorausgesetzt, daß dieses Gesamtvolumen sehr klein ist.“

nicht so tief einsinkt wie in reines Wasser, frei von suspendierten Teilchen.

Bewegen sich die suspendierten Teilchen aufwärts, wie die Butterkügelchen in der Milch, so bleiben die Überlegungen prinzipiell dieselben; die Einwirkung auf den Auftrieb wird dann im entgegengesetzten Sinn stattfinden.

Zum Mechanismus der Druckübertragung von den Teilchen auf den Senkkörper ist mithin in der Tat Bewegung der Teilchen erforderlich. Die vorhandene Bewegung tritt also noch als wesentliches Moment hinzu zu der vernichteten Beschleunigung, deren ursächliche Bedeutung für den Druck der Teilchen auf die Flüssigkeiten in den Abschnitten I und II erkannt und nachgewiesen wurde.

Nachdem so unsere Fragen eine vollständige Beantwortung gefunden haben, wollen wir zum Schluß noch eine ganz allgemeine Überlegung anstellen, die uns ebenfalls wieder zeigt, wie die Reibung der maßgebende Faktor ist. Wir können unsere Frage dahin stellen: Welches spezifische Gewicht muß ein fester Körper haben, damit er im Inneren einer Suspension schwebt? Diese Gleichgewichtsfrage können wir nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen beantworten. Verschieben wir den festen Körper in der Flüssigkeit, so kommt für die Arbeit der Schwere alles darauf an, ob die suspendierten Teilchen völlig mit der Flüssigkeit sich verschieben und an Stelle des festen Körpers treten, oder nicht. Ersteres ist der Fall bei hinreichend großer Reibung; bei ihr also kommen die Teilchen mit ihrem vollen Gewicht in Betracht.

Marburg i. H., Physik. Institut, April 1907.

(Eingegangen 9. Mai 1907).

## 8. Theorie der gekrümmten Kapillarschicht; von G. Bakker.

### § 1. Die Gleichungen von Lord Kelvin.

In diesen Annalen<sup>1)</sup> habe ich gezeigt, daß in einer ebenen Kapillarschicht einer Flüssigkeit, welche nur in Berührung mit ihrem gesättigten Dampf ist, der hydrostatische Druck in einer Richtung *senkrecht* zu ihrer Oberfläche dem Dampfdruck ( $p_1$ ) gleich ist. Der hydrostatische Druck  $p_2$  in einer Richtung *parallel* ihrer Oberfläche änderte sich dagegen von Punkt zu Punkt und hätte also einen Gradient. Die Ab-

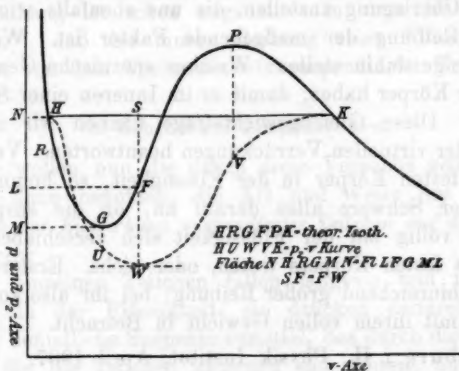


Fig. 1.

hängigkeit zwischen diesem Druck  $p_2$  und  $1/\rho$ , wenn  $\rho$  die Dichte in dem betrachteten Punkt der Kapillarschicht darstellt, würde gegeben durch die Kurve  $HUVFK$  der Fig. 1, wo die Kurve  $HGFPK$  die theoretische Isotherme von Thomson-van der Waals darstellt. Wir wollen nun diese Betrachtungen ausdehnen auf eine *kugelschalförmige* Kapillar-

1) G. Bakker, Ann. d. Phys. 20. p. 40 u. 61. 1906.

schicht. Hierzu können wir z. B. erstens eine kugelförmige Dampfblase im Innern einer Flüssigkeit betrachten. Die Kapillarschicht ringsum des Dampfes ist in diesem Falle eine kugelförmige Schale. Die Oberfläche der Kapillarschicht ist deshalb *konkav nach der des Dampfes hin*. Da die Kapillarkräfte nur auf unmeßbar kleine Abstände wirken, so soll das Potential in einem Punkte im Innern der Flüssigkeit nur abhängen von der Materie innerhalb einer Wirkungssphäre, deren Zentrum der betrachtete Punkt ist. In einem Punkt eines homogenen Teiles der Flüssigkeit ist also das Potential der Dichte in dem betrachteten Punkte proportional, und ist für die Potentialfunktion der Kräfte zwischen den *Elementen* des betrachteten Agens die Funktion:

$$-f e^{-\frac{r}{\lambda}}$$

angewiesen. Das habe ich früher<sup>1)</sup> auf folgende Weise gezeigt. Da das Potential  $V$  der Dichte in dem betrachteten Punkt proportional ist, so haben wir im Inneren der Flüssigkeit:

$$V = -C\rho,$$

wo  $C$  eine Konstante und  $\rho$  die Dichte in dem betrachteten Punkt darstellt. Sind  $q$  und  $f$  neue Konstanten, so können wir auch setzen:

$$q^3 V = -4\pi f\rho,$$

was für die folgenden Rechnungen bequemer ist.

Die Kraft ist im Inneren des homogenen Agens (wir wollen es in der Folge Flüssigkeit nennen) Null, deshalb:

$$-\frac{dV}{dx} = 0, \quad -\frac{dV}{dy} = 0, \quad -\frac{dV}{dz} = 0,$$

und auch:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = 0 \quad \text{oder} \quad \Delta^2 V = 0.$$

Denken wir uns, daß die Flüssigkeit die Gestalt eines Würfels hat, und wählen wir ein Koordinatensystem, dessen Achsen durch den Mittelpunkt des Würfels gehen, während sie den Kanten parallel laufen. Dann können wir für einen Punkt

1) G. Bakker, Zeitschr. f. phys. Chem. 33. p. 485 u. 486. 1900.

außerhalb des Würfels über eine bestimmte Entfernung von der Kante die Kraftlinien als parallel und senkrecht zu den Seitenflächen betrachten. Wir haben also z. B. für einen Punkt auf der positiven Seite der  $X$ -Achse in unmittelbarer Nähe außerhalb des Würfels:

$$-\frac{dV}{dy} = 0 \quad \text{und} \quad -\frac{dV}{dx} = 0 \quad \text{und} \quad -\frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dx^2} = 0.$$

In einer Richtung parallel der positiven  $X$ -Achse muß das Potential schnell bis zu Null abnehmen. Eine einfache (vielleicht die einfachste) Funktion, welche dieser Forderung genügt, ist  $Ae^{-qx}$ , wenn nur  $q$  groß genug gewählt wird. Also haben wir, wenn

$$\frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dx^2} = 0 \quad \text{und} \quad \varrho = 0$$

$$V = Ae^{-qx},$$

oder durch zweimalige Differentiation:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = q^2 V.$$

Auf ähnliche Weise zeigen wir, wenn

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} = 0 \quad \text{und} \quad \varrho = 0,$$

daß

$$\frac{d^2V}{dy^2} = q^2 V \text{ etc.}$$

Weiter fanden wir schon, daß, wenn  $\varrho$  von Null verschieden ist, und

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0,$$

$$q^2 V = -4\pi f \varrho.$$

Alle diese Forderungen lassen sich nun als eine einzige Differentialgleichung schreiben:

$$(1) \quad \Delta^2 V = q^2 V + 4\pi f \varrho.$$

L. c. habe ich nun folgenden Satz bewiesen:

Ist irgend ein homogenes Massensystem gegeben, und ist ferner  $V$  eine im ganzen Raume gegebene Funktion von  $x, y, z$ , welche folgenden drei Bedingungen genügt:

1.  $V$  und seine ersten Derivierten nach  $x, y, z$  sind überall stetig;

2. mit Ausnahme gewisser Stellen (die aber keine räumliche Ausdehnung haben) ist im ganzen Raum:

$$\Delta^2 V = q^2 V + 4\pi f \rho,$$

wo  $\rho$  die Dichtigkeit des Massensystems im Punkte  $x, y, z$  bezeichnet;

3. die Produkte

$$xV, yV, zV, x^2 \frac{dV}{dx}, y^2 \frac{dV}{dy}, z^2 \frac{dV}{dz}$$

werden nirgends unendlich, so ist  $V$  das Potential des Massensystems in bezug auf den Punkt  $x, y, z$ , wenn

$$-f \frac{e^{-qr}}{r}$$

die Potentialfunktion darstellt.

In der Theorie der Kapillarität gibt es kein Agens, das über Flächen zerstreut oder in Punkten konzentriert ist. Ich habe aber dem Satz in seiner allgemeineren Fassung den Vorzug gegeben.

Auf die durch C. Neumann gefundene Eigenschaft dieser Potentialfunktion und das von mir umgekehrte Problem habe ich bereits verwiesen; ebenfalls auf die van der Waalsschen Betrachtungen.<sup>1)</sup> Alle diese Betrachtungen zusammen weisen die Funktion

$$-f \frac{e^{-qr}}{r}$$

an als Potentialfunktion der Kräfte zwischen den Volumenelementen des Agens, das die Materie repräsentiert.

In der Gleichung (1) sind die Größen  $V$  und  $\rho$  (Potential und Dichte) als Funktionen rechtwinkliger Koordinaten betrachtet. Indessen ist es bei verschiedenen Untersuchungen von Interesse, diese Gleichung auf folgende Weise durch eine andere zu ersetzen. Dazu leiten wir aber vorher eine Form ab für die potentielle Energie der Volumkräfte. Ist  $V$  das Potential, so wird die fragliche Größe:

$$2) \quad W = \frac{1}{2} \int V \rho d\tau \quad (d\tau = \text{Volumenelement}).$$

1) G. Bakker, Ann. d. Phys. 20. p. 43 u. 44. 1906.



Das Integral betrachten wir als eins über den ganzen Raum. Unsere Differentialgleichung

$$(1) \quad \Delta^2 V = q^2 V + 4\pi f \varrho$$

gibt:

$$\varrho = \frac{\Delta^2 V - q^2 V}{4\pi f}.$$

Durch Substitution in (2) also:

$$W = \frac{1}{8\pi f} \int V \Delta^2 V d\tau - \frac{q^2}{8\pi f} \int V^2 d\tau.$$

Weiter ist:

$$\int V \Delta^2 V d\tau = \int V \frac{d^2 V}{dx^2} d\tau + \int V \frac{d^2 V}{dy^2} d\tau + \int V \frac{d^2 V}{dz^2} d\tau.$$

Durch partielle Integration wird:

$$\int V \frac{d^2 V}{dx^2} d\tau = \iint \frac{dV}{dx} V dy dz - \int \left( \frac{dV}{dx} \right)^2 d\tau.$$

Da  $V$  und  $dV/dx$  für unendliche Entfernung gleich Null werden, so können wir auf bekannte Weise zeigen, daß das Flächenintegral:

$$\iint \frac{dV}{dx} V dy dz$$

gleich Null ist.

$$\int V \frac{d^2 V}{dx^2} d\tau = - \int \left( \frac{dV}{dx} \right)^2 d\tau.$$

Durch Substitution dieses Ausdruckes und des analogen für

$$\int V \frac{d^2 V}{dy^2} d\tau \quad \text{und} \quad \int V \frac{d^2 V}{dz^2} d\tau$$

erhält man:

$$(2) \quad W = - \frac{1}{8\pi f} \int \left\{ \left( \frac{dV}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dV}{dy} \right)^2 + \left( \frac{dV}{dz} \right)^2 \right\} d\tau - \frac{q^2}{8\pi f} \int V^2 d\tau.$$

Die Energie pro Volumeinheit wird daher:

$$W_1 = - \frac{R^2 + q^2 V^2}{8\pi f},$$

wo  $R$  die Kraft auf die Masseneinheit bedeutet.

Die Größe  $q$  ist der reziproke Wert einer Linie. Setzen wir also  $q = 1/\lambda$ , dann geht die letzte Formel über in:

$$W_1 = - \frac{1}{8\pi f} \left( R^2 + \frac{V^2}{\lambda^2} \right).$$

Für  $q=0$  oder  $\lambda=\infty$  wird die Potentialfunktion  $-f(e^{-q\tau}/r)$  die Newtonsche Funktion  $-(f/r)$ , und wir erhalten die bekannte Maxwellsche Formel

$$W_1 = -\frac{R^2}{8\pi f}$$

für ein elektrostatisches Feld.

Um nun Gleichung (1) durch eine andere zu ersetzen, zerteilen wir den ganzen Raum durch drei Systeme orthogonaler Flächen in Zellen. Diese Flächensysteme schneiden einander bekanntlich nach dem Satz von Dupin in Krümmungslinien.<sup>1)</sup> Nennen wir die Differentialen der Bogen dieser Krümmungslinien  $du$ ,  $dv$  und  $dn$ . Für die Energie des betrachteten Agens

$$(2) \quad W = -\frac{1}{8\pi f} \int R^2 d\tau - \frac{q^2}{8\pi f} \int V^2 d\tau$$

können wir auch schreiben:

$$W = -\frac{1}{8\pi f} \iiint \left\{ \left( \frac{\partial V}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)^2 \right\} du dv dn - \frac{q^2}{8\pi f} \iiint V^2 du dv dn.$$

Die Variation der Energie wird also:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta W = & -\frac{1}{4\pi f} \iiint \left\{ \frac{\partial V}{\partial u} \delta \frac{\partial V}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial v} \delta \frac{\partial V}{\partial v} \right. \\ & \left. + \frac{\partial V}{\partial n} \delta \frac{\partial V}{\partial n} \right\} du dv dn \\ & - \frac{q^2}{4\pi f} \iiint V \delta V du dv dn. \end{aligned} \right.$$

Setzen wir:

$$du dv = dS_1, \quad du dn = dS_2, \quad dv dn = dS_3,$$

so ist:

$$\begin{aligned} \iiint \frac{\partial V}{\partial u} \delta \frac{\partial V}{\partial u} dS_3 du &= \iiint \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial \delta V}{\partial u} du dS_3 \\ &= \iint \frac{\partial V}{\partial u} dS_3 \delta V - \iiint \delta V \frac{\partial \left( \frac{\partial V}{\partial u} dS_3 \right)}{\partial n} du. \end{aligned}$$

1) Vgl. z. B. F. Joachimsthal, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung. 2. Aufl. p. 117.

Die Integrale beziehen sich auf den ganzen Raum, und das Flächenintegral wird deshalb Null. Durch Entwicklung der anderen Glieder des ersten Raumintegrals von (3) erhält man:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta W = & \frac{1}{4\pi f} \iiint \delta V \left\{ \frac{\partial \left( \frac{\partial V}{\partial u} dS_1 \right)}{\partial u} du + \frac{\partial \left( \frac{\partial V}{\partial v} dS_1 \right)}{\partial v} dv \right. \\ & \left. + \frac{\partial \left( \frac{\partial V}{\partial n} dS_1 \right)}{\partial n} dn \right\} \\ & - \frac{q^2}{4\pi f} \iiint V \delta V du dv dn. \end{aligned} \right.$$

Betrachten wir nun das krummlinige Parallelepipedon, welches über den durch einen betrachteten Punkt gehenden Differentialen  $du$ ,  $dv$  und  $dn$  konstruiert ist, und dessen Grundfläche  $dS_1 = du dv$  zwischen vier Elementen von Krümmungslinien enthalten ist. Nennen wir das gegenüber  $dS_1$  liegende Flächenelement  $dS_1'$ , so wird, wenn man kleine Größen höherer Ordnung vernachlässigt:

$$\frac{\partial}{\partial n}(dS_1) = \frac{dS_1' - dS_1}{\partial n}.$$

Man erhält also:

$$(5) \quad \frac{\partial \left( \frac{\partial V}{\partial n} dS_1 \right)}{\partial n} dn = \frac{\partial}{\partial n} dS_1 dn + \frac{\partial V}{\partial n} (dS_1' - dS_1).$$

Nun sind  $du$ ,  $dv$  Elemente der Krümmungskurven im betrachteten Punkt der Fläche  $S_1$ . Deshalb:

$$(6) \quad dS_1 = du dv \left( 1 + \frac{dn}{R_1} \right) \left( 1 + \frac{dn}{R_2} \right) = dS_1 + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) du dv dn.$$

Sind ferner  $dS_1$  Elemente von Niveauflächen und  $dn$  Differentiale von Kraftlinien, so wird:

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial V}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial v} = 0,$$

und man erhält aus (4) mittels (5) und (6):

$$(7) \quad \delta W = \frac{1}{4\pi f} \int \delta V \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial n} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - q^2 V \right\} d\tau$$

( $d\tau$  = Raumelement).

Für die potentielle Energie hat man allgemein den Ausdruck:

$$W = \frac{1}{2} \int V \rho \, d\tau.$$

Variiert man nun allein die Dichte, so ist:

$$\int V \partial \rho \, d\tau = \int \rho \partial V \, d\tau,$$

und

$$(8) \quad \delta W = \frac{1}{2} \int V \delta \rho \, d\tau + \frac{1}{2} \int \rho \delta V \, d\tau = \int \rho \delta V \, d\tau.$$

Durch Gleichsetzung von (7) und (8):

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial V}{\partial n} + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial V}{\partial n} = q^2 V + 4\pi f \rho.$$

Für eine *homogene* Phase wird:

$$\frac{d^2 V}{dh^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dV}{dh} = 0.$$

Deshalb ändert sich die Differentialgleichung für solch eine *homogene* Phase in:

$$V + 4\pi f \lambda^2 \rho = 0.$$

Nach Gauss und van der Waals ist aber in diesem Falle:

$$V = -2a\rho,$$

wo  $a$  den Koeffizient des Laplaceschen Ausdruckes für die (innere) Kohäsion (Molekulardruck) bedeutet. Deshalb:

$$2\pi f \lambda^2 = a.$$

Wir haben also für eine kugelförmig *konkave* Kapillarschicht:

$$(10) \quad \lambda^2 \frac{d^2 V}{dh^2} - \frac{2\lambda^2}{R} \frac{dV}{dh} = V + 2a\rho,$$

wenn  $R$  der Radius der durch den betrachteten Punkt gelegten Kugelfläche von konstanter Dichte bedeutet und  $dh$  die Differentiale einer Strecke senkrecht auf die Oberfläche der kugelschal förmigen Kapillarschicht darstellt; positiv gerechnet in der Richtung:

Flüssigkeit  $\longrightarrow$  Dampf.

Ist  $\mu = \int v \, dp$ , wo  $p$  den Druck der *theoretischen Isotherme* bedeutet, für einen Punkt, welcher korrespondiert<sup>1)</sup> mit der

1) Ein Punkt der theoretischen Isotherme soll korrespondieren mit einem Punkt der Kapillarschicht, wenn das spezifische Volum des ersten Punktes denselben Wert hat als der reziproke Wert der Dichte in dem betrachteten Punkt der Kapillarschicht.

Dichte in dem betrachteten Punkt der Kapillarschicht, so wird  $\mu$  das thermodynamische Potential genannt; und ist  $\mu_1$  ihr Wert in der homogenen flüssigen Phase, welche die kugelschalförmige Kapillarschicht an der äußeren Seite begrenzt, so hat man auch hier wieder, wie schon früher von mir gezeigt worden ist<sup>1)</sup>:

$$(11) \quad V + 2 a \varrho = \mu_1 - \mu,$$

und deshalb:

$$(10a) \quad \lambda^2 \frac{d^3 V}{dh^3} - \frac{2 \lambda^2}{R} \frac{dV}{dh} = \mu_1 - \mu.$$

Da für die homogenen Phasen (Flüssigkeit und Dampf), welche die kugelschalförmige Kapillarschicht bez. an der äußeren und inneren Seite begrenzen,  $d^3 V/dh^3$  und  $dV/dh$  verschwinden, so sind bei Gleichgewicht und bei quasi-stationären Zuständen die Werte von  $\mu$  in der flüssigen bez. dampfförmigen Phase einander gleich.

In Fig. 2 ist wieder  $HGPK$  die theoretische Isotherme, und die rechtlinige Strecke  $HK$  ist die sogenannte empirische

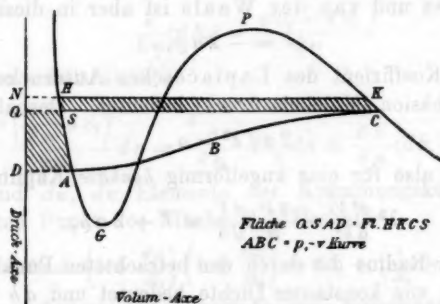


Fig. 2.

Isotherme. Fläche  $NHADN$  stellt also für den Punkt  $A$  (mit dem entsprechend gesetzten Zeichen) den Wert von  $\int v dp$  dar. Korrespondieren also die Punkte  $A$  und  $C$  mit den Punkten in den Grenzflächen der kugelschalförmigen Kapillarschicht, welche sie bez. an der äußeren und inneren Seite be-

1) G. Bakker, Ann. d. Phys. 20. p. 49. 1906.

grenzen (die Kapillarschicht *umschließt* die Dampfblase), so hat man also:

$$\text{Fläche } NHADN = \text{Fläche } NKCQN.$$

(Weiter unten soll gezeigt werden, daß die Kurve, welche in der kugelschalförmigen Kapillarschicht die Beziehung zwischen  $p_1$  und  $v = 1/\rho$  darstellt, wirklich eine Gestalt hat, wie durch Kurve  $ABC$  angedeutet ist. Ist die Kapillarschicht eben, so sind die Drucke senkrecht auf ihrer Oberfläche überall dem gewöhnlichen Dampfdruck gleich;  $A$  fällt in diesem Falle mit  $H$ , und  $C$  mit  $K$  zusammen.)

Setzen wir:

$$NH = v, \quad NK = v_2, \quad DA = v_1', \quad QC = v_2'$$

und betrachten wir angenähert  $NHAD$  als ein Trapez, so hat man deshalb:

$$(12) \quad (v_1 + v_1')(v_1 - p_a) = (v_2 + v_2')(p_1 - p_{af}),$$

wo  $p_a$  und  $p_{af}$  bez. die Drucke in den flüssigen und dampfförmigen Phasen in der Nähe der kugelschalförmigen Kapillarschicht bedeuten.

Durch Differentiation von (10a) erhält man weiter:

$$\lambda^2 d \frac{d^3 V}{dh} - \frac{2\lambda^2}{R} d \frac{dV}{dh} = -v dp,$$

woraus, nach Substitution des Wertes von  $\rho$  aus (11):

$$dp = -\frac{\lambda^4}{4a} d \left\{ \frac{d^3 V}{dh^3} \right\} - \frac{\lambda^4}{2aR} d \left\{ \frac{dV}{dh} \frac{d^3 V}{dh^3} \right\} \\ + \frac{\lambda^4}{aR^2} d \left( \frac{dV}{dh} \right)^2 + \frac{\lambda^2}{2a} V d \frac{d^3 V}{dh^3} + \frac{\lambda^2}{aR} V d \frac{dV}{dh}.$$

Nach Integration:

$$(13) \quad p_{af} - p_a = \frac{2}{R} \frac{\lambda^2}{2a} \int_1^2 \left( \frac{dV}{dh} \right)^2 dh,$$

wo nun aber  $R$  ein Mittelwert ist zwischen dem Wert des kleinsten und größten Radius der kugelförmigen Fläche, welche die kugelschalförmige Kapillarschicht begrenzen.

Für die Kohäsion, bez. *in der Richtung* und *senkrecht auf* der Richtung der Kraftlinien, fand ich<sup>1)</sup>:

1) G. Bakker, Ann. d. Phys. 20. p. 42. 1906.

$$S_1 = -\frac{1}{8\pi f} \left\{ \left( \frac{dV}{dh} \right)^2 - \frac{V^2}{\lambda^2} \right\},$$

$$S_2 = -\frac{1}{8\pi f} \left\{ \left( \frac{dV}{dh} \right)^2 + \frac{V^2}{\lambda^2} \right\},$$

wo  $q$  durch  $1/\lambda$  ersetzt ist ( $\lambda$  ist deshalb eine Strecke).

Da nun weiter:

$$S_2 - S_1 = p_1 - p_2 \quad 1),$$

so haben wir auch:

$$(14) \quad p_1 - p_2 = \frac{1}{4\pi f} \left( \frac{dV}{dh} \right)^2.$$

Nun war die totale Abweichung von dem Pascalschen Gesetz oder dem Integral:

$$\int_1^2 (p_1 - p_2) dh,$$

die Oberflächenspannung oder die Kapillarkonstante  $H$  von Laplace.<sup>2)</sup> Wir können deshalb statt (13) schreiben:

$$(15) \quad p_{\text{af.}} - p_{\text{n.}} = \frac{2H}{R}$$

und erhalten mit Hilfe von (12) die Gleichungen von Lord Kelvin in der Gestalt:

$$(16a) \quad p_{\text{af.}} = p_1 - \frac{v_1 + v_1'}{(v_2 + v_2') - (v_1 + v_1')} \cdot \frac{2H}{R}$$

und

$$(16b) \quad p_{\text{n.}} = p_1 - \frac{v_2 + v_2'}{(v_2 + v_2') - (v_1 + v_1')} \cdot \frac{2H}{R}.$$

§ 2. Die Kurven, welche den hydrostatischen Druck  $p_1$ <sup>3)</sup> bez.  $p_2$  darstellen in ihrer Abhängigkeit von einer Strecke  $h$  in der Richtung des Radius und in ihrer Abhängigkeit von dem reziproken Wert  $v = 1/\rho$  der Dichte in dem betrachteten Punkt der Kapillarschicht.

Bestimmen wir nun erstens die Gestalt der Kurve, welche für die kugelschalförmige Kapillarschicht den hydrostatischen Druck  $p_1$  in einer Richtung senkrecht auf die Oberfläche der

1) G. Bakker, l. c. p. 44.

2) G. Bakker, Ann. d. Phys. 14. p. 612. 1904.

3) Also der Druck in der Richtung des Radius oder „in der Richtung der Dicke“ der kugelschalförmigen Kapillarschicht, eine Größe, welche für eine ebene Kapillarschicht dem gewöhnlichen Dampfdruck gleich ist.



Schicht (in der Richtung des Radius also) darstellt in ihrer Abhängigkeit von einer Strecke  $h$  in derselben Richtung. Wir denken uns, daß die Kapillarschicht eine kugelförmige Dampfblase umhüllt, während sie selbst durch Flüssigkeit umgeben ist. Diese Strecke soll anfangen am Ende des äußeren Radius der kugelschalförmigen Kapillarschicht und enden am Ende des inneren Radius. Die ganze Strecke ist also die Dicke der Kapillarschicht und ihre Differentiale  $dh$  ist positiv in der Richtung Flüssigkeit-Dampf.

Bedeutet  $\theta$  den thermischen Druck in einem Punkt der Kapillarschicht, so ist in jeder Richtung der hydrostatische Druck die Differenz zwischen  $\theta$  und der Kohäsion. Senkrecht zur Kapillarschicht (also radial) hat man deshalb:

$$p_1 = \theta - S_1.$$

Nun ist in der Richtung der Kraftlinien (vgl. oben):

$$S_1 = \frac{V^2}{4a} - \frac{\lambda^2}{4a} \left( \frac{dV}{dh} \right)^2.$$

Also:

$$p_1 = \theta + \frac{\lambda^2}{4a} \left( \frac{dV}{dh} \right)^2 - \frac{V^2}{4a}.$$

Durch Differentiation:

$$\frac{dp_1}{dh} = \frac{d\theta}{dh} + \frac{\lambda^2}{2a} \frac{dV}{dh} \frac{d^2V}{dh^2} - \frac{V}{2a} \frac{dV}{dh}.$$

Weiter ist:

$$d\theta = -\varrho dV$$

und

$$(10) \quad \lambda^2 \frac{d^2V}{dh^2} - V - 2a\varrho = \frac{2\lambda^2}{R} \frac{dV}{dh} \quad (\text{vgl. oben}).$$

Deshalb:

$$(17) \quad \frac{dp_1}{dh} = \frac{\lambda^2}{a} \left( \frac{dV}{dh} \right)^2 \cdot \frac{1}{R} = \frac{1}{4\pi f} \left( \frac{dV}{dh} \right)^2 \cdot \frac{2}{R} = \frac{2(p_1 - p_2)}{R}.$$

Wir erhalten also den einfachen Satz:

*Der Gradient des hydrostatischen Druckes  $p_1$  in einem Punkt einer kugelschalförmigen Kapillarschicht, in einer Richtung senkrecht zu ihrer Oberfläche, ist das Produkt der Abweichung von dem Pascalschen Gesetz mit der Krümmung.*

Ist die Krümmung Null, und die Kapillarschicht also eben, so erhält man das bekannte Resultat für eine ebene Kapillarschicht:

$$\frac{dp_1}{dh} = 0 \quad \text{oder} \quad p_1 = \text{Konstante} = \text{Dampfdruck}.$$

Durch Integration von (17) erhält man unmittelbar den Satz von Lord Kelvin:

$$p_{at.} - p_n. = \frac{2}{R} \int_1^2 (p_1 - p_2) dh = \frac{2H}{R}.$$

Nun ist für jeden Punkt in der Kapillarschicht:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{4\pi f} \left( \frac{dV}{dh} \right)^2$$

und also:

$$p_1 > p_2$$

und deshalb immer:

$$\frac{dp_1}{dh} > 0.$$

Der hydrostatische Druck  $p_1$  nimmt also von der flüssigen Phase bis zu der dampfförmigen Phase immer zu. Der Anfangswert  $p_n.$  wird gegeben durch die Ordinate von dem Punkt  $A$ , während der Endwert  $p_{at.}$  durch die Ordinate von  $C$  gegeben ist (Fig. 3).

Ganz auf dieselbe Weise, wie ich früher für eine ebene Kapillarschicht gezeigt habe <sup>1)</sup>, kann man wieder beweisen,

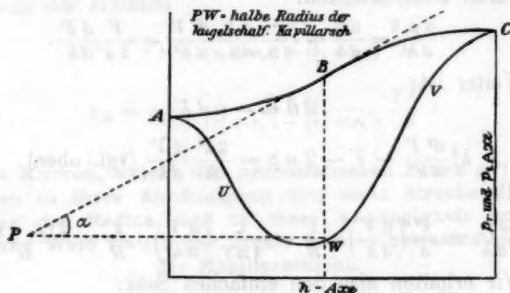


Fig. 3.

daß die Kurve, welche das Potential  $V$  als Funktion von  $h$  darstellt, einen Wendepunkt hat, oder daß  $dV/dh$  ein Maximum hat. Da nun  $dp_1/dh$  zu  $1/R (dV/dh)^2$  proportional ist (vgl. die Gleichung (17)), so soll also die Kurve, welche  $p_1$  als Funktion von  $h$  darstellt, ebenso einen Wendepunkt haben,

1) G. Bakker, Ann. d. Phys. 15. p. 545. 1904.

und die  $p_1 - h$ -Kurve hat eine Gestalt, wie in Fig. 3 die Kurve  $ABC$ .

Durch Multiplikation mit  $dh/dv$ , wo  $v = 1/\rho$  gleich den reziproken Wert der Dichte in dem betrachteten Punkt der Kapillarschicht bedeutet, findet man aus (17)

$$\frac{dp_1}{dv} = \frac{1}{4\pi f} \left( \frac{dV}{dh} \right)^2 \cdot \frac{2}{R} \frac{dh}{dv}.$$

Wie ich in diesen Annalen<sup>1)</sup> zeigte, ist es wahrscheinlich (fast selbstverständlich), daß für alle Punkte einer Kapillarschicht

$$\frac{dv}{dh} = \frac{d}{dh} \frac{1}{\rho}$$

dasselbe Zeichen hat. Die Natur der Kurve, welche  $p_1$  in ihrer Abhängigkeit von  $v = 1/\rho$  darstellt, ist also dieselbe wie für die zuletzt betrachtete Kurve, und auf diese Weise findet man die Kurve  $ABC$  in Fig. 2. Die  $p_1$ -Kurve ist also in Zusammenhang gebracht mit der theoretischen Isotherme  $HGVK$ ;  $HK$  ist die sogenannte empirische Isotherme.

§ 3. Die Kurve, welche den hydrostatischen Druck  $p_2$  in einer kugelschalförmigen Kapillarschicht, in einer Richtung senkrecht zu dem Radius, in ihrer Abhängigkeit von dem reziproken Wert der Dichte ( $v = 1/\rho$ ) in dem betrachteten Punkt darstellt.)

Der Radius der kugelschalförmigen Kapillarschicht gibt die Richtung der Kraftlinien an. Der Druck  $p_2$  ist deshalb in einer Richtung senkrecht auf die Kraftlinien. Ist  $\theta$  der thermische Druck und  $S_2$  die Kohäsion in der angedeuteten Richtung, so hat man wieder:

$$p_2 = \theta - S_2.$$

Nun ist in einer Richtung senkrecht zu den Kraftlinien die Kohäsion gegeben durch die Formel:

$$S_2 = \frac{1}{8\pi f} \left\{ \left( \frac{dV}{dh} \right)^2 + \frac{V^2}{\lambda^2} \right\} \cdot \text{ )}$$

1) G. Bakker, Ann. d. Phys. 17. p. 478. 1905.

2) In dem Falle, wo der Radius der Oberfläche der Kapillarschicht „unendlich“ groß wird, und deshalb die Schicht als eben betrachtet werden kann, wird  $p_2$  also der hydrostatische Druck parallel ihrer Oberfläche.

3) G. Bakker, Ann. d. Phys. 14. p. 619. 1904.

Also:

$$(18) \quad p_2 = \theta - \frac{1}{8\pi f} \left( \frac{dV}{dh} \right)^2 - \frac{V^2}{8\pi f \lambda^2}.$$

Weiter war in der Richtung der Kraftlinien<sup>1)</sup>:

$$S_2 = \frac{1}{8\pi f} \left\{ \left( \frac{dV}{dh} \right)^2 + \frac{V^2}{\lambda^2} \right\}.$$

Für den hydrostatischen Druck in dieser Richtung hat man deshalb:

$$(19) \quad p_1 = \theta + \frac{\lambda^2}{4a} \left( \frac{dV}{dh} \right)^2 - \frac{V^2}{4a},$$

denn:

$$a = 2\pi f \lambda^2 \text{ (vgl. oben p. 539).}$$

Wir erhalten also:

$$(20) \quad \frac{p_1 + p_2}{2} = \theta - \frac{V^2}{4a}.$$

$p_1 + p_2/2$  ist die halbe Summe der hydrostatischen Drucke bez. in der Richtung und senkrecht zu der Richtung der Kraftlinien.<sup>2)</sup> Wir wollen diese Größe durch  $v$  andeuten. Also:

$$(20a) \quad v = \theta - \frac{V^2}{4a}.$$

Durch Differentiation von (20a):

$$\frac{dv}{dV} = \frac{d\theta}{dV} - \frac{2V}{4a} \frac{dV}{dV} = \frac{d\theta}{dV} \left( 1 + \frac{Vv}{2a} \right),$$

denn:

$$d\theta = -\varrho dV.$$

Weiter ist (vgl. oben Gleichung (11)):

$$(11) \quad V + 2a\varrho = \mu_1 - \mu.$$

Also:

$$\frac{dv}{dV} = \frac{d\theta}{dV} \frac{\mu_1 - \mu}{2a\varrho}.$$

$\mu$  ist das thermodynamische Potential der homogenen Phase, welche mit der Densität in dem betrachteten Punkt der Kapillarschicht korrespondiert. Wenn der Index 1 Bezug hat auf die homogene Phase der Flüssigkeit, so ist also:

$$\mu - \mu_1 = \int_1 v dp.$$

1) Vgl. oben § 2.

2)  $p_1$  und  $p_2$  können auch bez. betrachtet werden als der Maximalwert und der Minimalwert des hydrostatischen Druckes in dem betrachteten Punkt.

Konstruieren wir also in Fig. 4 die Kurve, welche den Mittelwert  $p$  in ihrer Abhängigkeit zu  $v = 1/\rho$  darstellt, so hat diese Kurve  $AEC$  ihr Minimum gerade unter dem Punkt  $E$  der theoretischen Isotherme von James Thomson, wo  $\mu = \mu_1$  oder Fläche  $DAGM$  gleich Fläche  $LEFGM$ . Man kann aber noch weiter gehen und zeigen, daß das Minimum der Kurve  $AEC$  zusammenfällt mit dem genannten Punkte der theoretischen Isotherme. Wenn n. l.  $\mu = \mu_1$ , so ist zufolge Gleichung (11):

$$V = -2a\rho$$

und Gleichung (20a) wird:

$$(21) \quad p = \theta - a\rho^2.$$

Andererseits ist aber für die theoretische Isotherme:

$$p = \theta - a\rho^2.$$

Deshalb:

$$v = p.$$

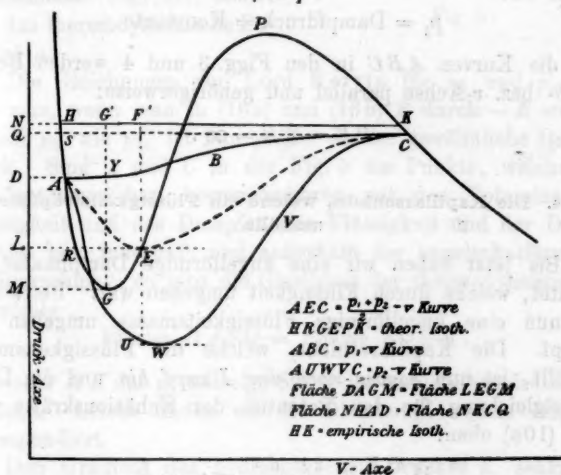


Fig. 4.

Für die Abhängigkeit von  $p_2$  und  $h$  erhalten wir eine ähnliche Kurve, wie die Kurve  $AUWVC$  in Fig. 4. Die entsprechende Kurve ist in Fig. 3 durch dieselben Buchstaben angedeutet. In dieser Fig. 3 ist:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BW}{PW} = \frac{p_1 - p_2}{PW}.$$

Andererseits haben wir:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dp_1}{dh} = \frac{2(p_1 - p_2)}{R}.$$

Deshalb:

$$R = \frac{1}{2} PW.$$

$PW$  ist also der „Durchmesser“ der kugelschalförmigen Kapillarschicht, welche zu dem Punktepaar  $A, C$  der Fig. 4 gehört.

Betrachten wir wieder Fig. 3, so kann man für jedes Punktepaar auf den Kurven  $ABC$  und  $AUWVC$ , welche dieselbe Abszisse haben, das entsprechende Dreieck  $PBW$  konstruieren. Man findet dann immer:

$$R = \frac{1}{2} PW.$$

Für eine *ebene* Kapillarschicht wird

$$p_1 = \text{Dampfdruck} = \text{Konstante}$$

und die Kurven  $ABC$  in den Figg. 3 und 4 werden Rechte der  $h$ - bez.  $v$ -Achse parallel und gehörigerweise:

$$PW = 2R = \infty.$$

#### § 4. Die Kapillarschicht, welche ein Flüssigkeitströpfchen umhüllt.

Bis jetzt haben wir eine kugelförmige Dampfmasse betrachtet, welche durch Flüssigkeit umgeben war. Betrachten wir nun eine kugelförmige Flüssigkeitsmasse umgeben von Dampf. Die Kapillarschicht, welche die Flüssigkeitsmasse umhüllt, ist nun *konvex nach dem Dampf hin* und die Differentialgleichung für das Potential der Kohäsionskräfte wird statt (10a) oben:

$$(22) \quad \lambda^2 \frac{d^2 V}{dh^2} + \frac{2\lambda^2}{R} \frac{dV}{dh} = \mu_1 - \mu.$$

und die Differenz zwischen  $p_{af.}$  und  $p_a.$  findet man aus (13) durch Änderung von  $R$  in  $-R$ . Also:

$$(23) \quad p_a. - p_{af.} = \frac{2}{R} \cdot \frac{\lambda^2}{2\alpha} \int_1^2 \left( \frac{dV}{dh} \right)^2 dh = \frac{2H}{R}.$$

Hier ist deshalb bekanntlich der Druck in der Flüssigkeit größer als der Druck in dem Dampf. In Gleichung (22) ist  $\mu_1$  das thermodynamische Potential in der kugelförmigen Flüssigkeitsmasse, und auf dieselbe Weise als oben findet man wieder, daß in der Flüssigkeit und in dem Dampf, wo:

$$\frac{d^2 V}{dh^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dV}{dh} = 0,$$

das thermodynamische Potential denselben Wert hat.

Nur innerhalb der kugelschalenförmigen Kapillarschicht, welche die kugelförmige Flüssigkeitsmasse begrenzt, ändert sich das thermodynamische Potential  $\mu$ .

Die Gleichungen von Lord Kelvin für  $p_n$  und  $p_{at}$  erhält man, wenn man in (16a) und (16b)  $R$  durch  $-R$  ersetzt. Sowohl  $p_n$  wie  $p_{at}$  ist nun größer als der gewöhnliche Dampfdruck. Sind  $A$  und  $C$  in der Fig. 5 die Punkte, welche auf der Isotherme bez. korrespondieren mit den Volumina der Flüssigkeit und des Dampfes (die Flüssigkeit und der Dampf ist also bez. innerhalb und außerhalb der kugelschalenförmigen Kapillarschicht), so gibt die Gleichheit der thermodynamischen Potentiale:

$$\text{Fläche } DASQ = \text{Fläche } SCKH,$$

wo wieder  $HK$  das geradlinige Stück der empirischen Isotherme darstellt. Leicht finden wir die Gleichung, welche mit (12) korrespondiert.

Den Gradienten des hydrostatischen Druckes  $p_1$  senkrecht auf der Oberfläche der Kapillarschicht (also in der Richtung der Kraftlinien), welche die kugelförmige Flüssigkeitsmasse umhüllt, erhalten wir aus (17), wenn wir wieder  $R$  durch  $-R$  ersetzen. Deshalb:

$$(24) \quad \frac{dp_1}{dh} = - \frac{2(p_1 - p_2)}{R}.$$

Da nun auch hier wieder die Abweichung  $p_1 - p_2$  von dem

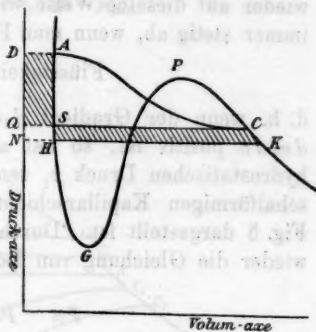


Fig. 5.



Pascalschen Gesetz dem Quadrat der Kraftintensität proportional ist, wird  $dp_1/dh$  negativ.

Daß die  $p_1-h$ -Kurve einen Wendepunkt hat, läßt sich wieder auf dieselbe Weise wie oben zeigen. Nimmt die Dichte immer stetig ab, wenn man Punkte betrachtet in der Richtung:

Flüssigkeit  $\rightarrow$  Dampf,

d. h. wenn der Gradient  $d\rho/dh$  negativ oder der Gradient  $dv/dh$  positiv ist, so hat also die Kurve  $ABC$  durch den hydrostatischen Druck  $p_1$  senkrecht zur Oberfläche der kugelschalenförmigen Kapillarschicht wirklich eine Gestalt, wie in Fig. 5 dargestellt ist. Durch Integration von (24) erhält man wieder die Gleichung von Lord Kelvin:

$$p_{at} - p_a = - \frac{2H}{R}.$$

Die  $p_2-v$ -Kurve kann wieder auf dieselbe Weise studiert werden wie oben.

#### § 5. Zusammenfassung der Betrachtungen über kugelförmige Dampfblasen und kugelförmige Flüssigkeitströpfchen.

Fassen wir erstens die Betrachtungen über die  $p_1-v$ -Kurven in *einer* Figur zusammen, und bedenken wir, daß bei den letzten Betrachtungen der größten Werte für den Dampfdruck  $p_{at}$  korrespondiert mit dem Punkt  $P$  in der Fig. 5, und daß in dem ersten Falle, wo der Dampf sich im Innern der Kapillarschicht befindet, Punkt  $G$  in der Fig. 5 korrespondiert mit dem kleinsten Werte des Druckes in der Flüssigkeit, welche nun den Dampf umhüllt, so erhalten wir die folgende Fig. 6 für die gesamten  $p_1-v$ -Kurven.

Die Kurve  $A_1C_1$  hat Bezug auf eine Dampfblase, wobei der Druck in der Flüssigkeit rings um die Blase ein Minimum ist. Den zugehörigen Radius der kugelförmigen Blase berechnet man aus (16b):

$$(25) \quad R_{at} = \frac{v_2 + v_2'}{v_2 + v_2' - (v_1 + v_1')} \frac{2H}{p_1 - p_{min}},$$

wo  $p_a = p_{min}$  korrespondiert mit dem Punkt  $A_1$ . Es ist aber fraglich, ob die Abweichung des Pascalschen Gesetzes schon

ihren Maximumwert angenommen hat und  $H$  also die Kapillarkonstante von Laplace darstellt. Wir schreiben darum:

$$R_{\text{af}} = \frac{v_2 + v_2'}{v_2 + v_2' - (v_1 + v_1')} \frac{2 H'}{p_1 - p_{\text{min}}}.$$

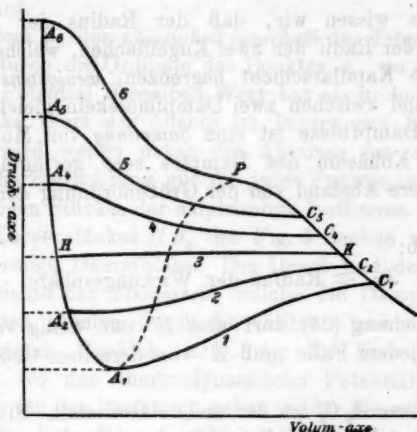


Fig. 6.

Wählen wir ein bestimmtes Beispiel, die absolute Temperatur sei:

$$T = \frac{27}{32} T_{\infty}.$$

Für diese Temperatur fand ich <sup>1)</sup>, daß die Dicke  $h$  einer ebenen Kapillarschicht gegeben werden kann durch:

$$(26) \quad h = \frac{3 H}{2 p_1},$$

wo  $H$  die Laplacesche Konstante und  $p_1$  den Dampfdruck darstellt.

Nach der Gleichung von van der Waals <sup>2)</sup> tangiert bei dieser Temperatur die Isotherme die Volumenachse, und deshalb:

$$p_{\text{min.}} = 0.$$

Weiter ist in diesem Falle der Quotient  $v_2/v_1$  von der Größenordnung 19.

1) G. Bakker, Zeitschr. f. physik. Chem. 51. p. 358 u. 361. 1905.

2) J. D. van der Waals, Kontinuität, p. 105. 1899.

Deshalb:

$$(26) \quad R_{\text{af}} = \frac{19}{18} \cdot \frac{2H'}{p_1} = \frac{19}{18} \cdot \frac{2H'}{\frac{8H}{2h}} = \text{ungefähr } \frac{4}{3} \frac{H'}{H} h.$$

Andererseits wissen wir, daß der Radius der Dampfblase (Mittelwert der Radii der zwei Kugelflächen, welche die kugelschalförmige Kapillarschicht begrenzen) *wenigstens* dem mittleren Abstand zwischen zwei Dampf molekeln gleich sein muß, denn eine Dampfblase ist eine *Sammlung* von Molekeln. Da weiter die Kohäsion des Dampfes sehr geringfügig ist, ist dieser mittlere Abstand von der Größenordnung der Wirkungssphäre.

Deshalb:

$$R_{\text{af}} \geq \text{Radius der Wirkungssphäre.}$$

In der Gleichung (26) darf also  $H'$  nur wenig von  $H$  differieren. In jedem Falle muß  $H'$  von derselben Größenordnung sein als  $H$ .

Die Kurve  $A_0 C_0$  ist der andere Grenzfall. Sie hat Bezug auf ein Flüssigkeitströpfchen, umgeben von Dampf. Auf ähnliche Weise, als  $R_{\text{af}}$  bezeichnet ist, findet man für diesen Fall:

$$(27) \quad R_{\text{a.}} = \frac{v_1 + v_1''}{v_2 + v_2'' - (v_1 + v_1')} \cdot \frac{2H''}{p_{\text{max.}} - p_1}.$$

$H''$  ist auch hier nicht notwendig die gewöhnlich betrachtete Kapillarkonstante von Laplace.  $v_1$  und  $v_2$  sind bez. die Abszissen von  $H$  und  $K$  in der Fig. 6, und  $v_1''$  und  $v_2''$  sind bez. die Abszissen von  $A_0$  und  $P$ . Für eine  $p_1 - v$ -Kurve in der Nähe von  $HK$  dagegen werden die Differenzen  $p_{\text{af.}} - p_1$  und  $p_1 - p_{\text{a.}}$  sehr klein, und können  $H'$  und  $H''$  durch  $H$  ersetzt werden;  $R_{\text{a.}}$  und  $R_{\text{af.}}$  werden also sehr groß, um bei der Limite, wenn  $A_4$  und  $C_4$  oder  $A_2$  und  $C_2$  also mit  $H$  und  $K$  zusammenfallen, unendlich zu werden, wobei die gekrümmte kugelschalförmige Kapillarschicht in eine ebene übergeht.

Bei jedem Punkt des Kurvenstückes  $PK$  der theoretischen Isotherme (Fig. 6) haben wir uns ein Flüssigkeitströpfchen von einem bestimmten Durchmesser gedacht. Ist z. B.  $C_3$  der betrachtete Punkt, so geben bez. die Ordinate und die Abszisse dieses Punktes den Druck  $p_{\text{af.}}$  und den reziproken Wert der

Dichte des Dampfes an, welcher das Flüssigkeitströpfchen umhüllt, während der Radius des Tröpfchens durch die Gleichung:

$$R_{fl.} = \frac{2H}{p_{fl.} - p_{df.}}$$

gefunden wird.

Der Druck  $p_{fl.}$  der *Flüssigkeit innerhalb* des Tröpfchens wird angegeben durch die Ordinate des Punktes  $A_6$ , wo das thermodynamische Potential denselben Wert hat als in dem Punkt  $C_6$ . Der reziproke Wert der Dichte im Innern des Flüssigkeitströpfchens wird weiter durch die Abszisse von  $A_6$  gegeben. Eine ähnliche Betrachtung gilt für jedes Punktepaar unterhalb des geradlinigen Stückes der empirischen Isotherme. Bei jedem Punkt des Kurvenstückes  $HA_1$  der Fig. 6 denken wir uns nun eine kugelförmige Dampfblase. Der Druck und der reziproke Wert der Dichte der *Flüssigkeit*, welche die Dampfblase umhüllt, sind bez. gegeben durch die Ordinate und die Abszisse des betrachteten Punktes, z. B.  $A_2$ ; die Koordinaten des Punktes  $C_2$ , wo das thermodynamische Potential denselben Wert hat als für den Punkt  $A_2$ , geben wieder die entsprechende Größe für die Dampfblase, während der Radius der Dampfblase gegeben ist durch:

$$R_{df.} = \frac{2H}{p_{df.} - p_{fl.}}$$

Ebenso wie bei einer ebenen Kapillarschicht fanden wir, daß für einen Punkt in einer kugelschalförmigen Kapillarschicht der hydrostatische Druck bez. ein Maximum und Minimum ist in der *Richtung* und *senkrecht* zu der Richtung der Kraftlinien. Die Kurve  $AEC$  (Fig. 4), welche den Mittelwert:

$$p = \frac{p_1 + p_2}{2}$$

dieser Drucke in ihrer Abhängigkeit von dem reziproken Wert der Dichte in dem betrachteten Punkt darstellt, schneidet, wie wir fanden, die theoretische Isotherme in einem Punkt  $E$  (Fig. 4), wo das thermodynamische Potential denselben Wert hat als in den Punkten  $A$  und  $C$ , und in diesem Punkte hat die  $p-v$ -Kurve  $AEC$  gerade ihre Minimumordinate. Wir haben also den folgenden Satz:

*Jedes Punktepaar der Isotherme, wofür das thermodynamische Potential denselben Wert hat, Fig. 7 (wie  $A_6$  und  $C_6$ ,  $A_7$  und  $C_7$  etc.),*

entspricht oberhalb des geradlinigen Stückes HK der empirischen Isotherme einem Flüssigkeitströpfchen derart, daß der Zustand innerhalb dieses Tröpfchens und der des Dampfes, welcher es umhüllt, durch die Lage dieses Punktepaares eindeutig bestimmt ist. Ebenso entspricht jedes Punktepaar unterhalb des geradlinigen Stückes HK der empirischen Isotherme einer kugelförmigen Dampfblase. Der

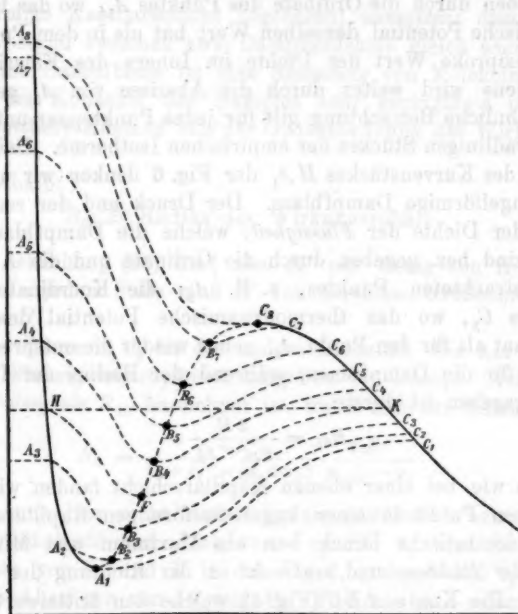


Fig. 7.

Zustand dieser Dampfblase und der Flüssigkeit, welche die Dampfblase umhüllt, ist wieder durch die Lage des Punktepaares (wie  $A_3$  und  $C_3$ ,  $A_2$  und  $C_2$  etc.) eindeutig bestimmt. Konstruiert man nun für jede kugelschalförmige Kapillarschicht, welche im ersten Falle das kugelförmige Flüssigkeitströpfchen, und im zweiten Falle die kugelförmige Dampfblase umhüllt, die Kurve, welche den Mittelwert  $p = (p_1 + p_2/2)^1$  der Maximal- und Minimaldrucke für

1) Um es hier noch einmal zu wiederholen: sowohl in einer ebenen wie in einer gekrümmten Kapillarschicht ist der hydrostatische Druck in

irgend einen Punkt dieser kugelschalförmigen Kapillarschichten in ihrer Abhängigkeit von dem reziproken Wert der Dichte darstellt, so bilden die Minima dieser Kurven gerade den labilen Teil der theoretischen Isotherme.

Hiermit ist also eine physische Bedeutung für den labilen Teil der theoretischen Isotherme gegeben.

*Bemerkung.* Ich habe meine obigen Betrachtungen von irgend einer Spezialform der Zustandsgleichung frei gehalten. Wollen wir aber zeigen, wie z. B. die Gleichung der  $p-v$ -Kurve mit Hilfe einer Zustandsgleichung gefunden wird, so können wir nicht besser tun, als dieser Untersuchung die van der Waalssche Zustandsgleichung zugrunde zu legen, denn ich glaube, daß wir alle einverstanden sind über die Bemerkung von Traube<sup>1)</sup>, wo er sagt: „Ich möchte bei dieser Gelegenheit bemerken, daß ich die Aufstellung von van der Waals' Zustandsgleichung als eine der ersten Großtaten der physikalischen Chemie betrachte. Berücksichtigt man, daß  $a$  und  $b$  keine Konstanten sind, so gilt jene Isothermengleichung mit wesentlich größerer Annäherung, als man bisher annahm; auf jeden Fall ist sie im allgemeinen jenen komplizierten Gleichungen vorzuziehen, die man an ihre Stelle gesetzt hat, welche vielleicht der Wahrheit näher kommen, aber zum Rechnen weit weniger geeignet sind.“

Die Gleichung der Kurve  $AEC$  in Fig. 4, welche die Beziehung zwischen  $p = (p_1 + p_2/2)$  und  $v$  darstellt, wird nun auf folgende Weise abgeleitet. In der Gleichung (20a) ersetzen wir den thermischen Druck  $\theta$  durch den van der Waalsschen Ausdruck:

$$\frac{RT}{v-b}$$

und erhalten:

$$(28) \quad p = \frac{RT}{v-b} - \frac{V^2}{4a}.$$

einem Punkt abhängig von der Richtung und also das Pascalsche Gesetz verletzt. In der Richtung, wo die Dichte sich am meisten ändert (in der Richtung des Gradienten der Dichte), ist der hydrostatische Druck ein Maximum, in einer Richtung senkrecht auf die erste dagegen ein Minimum. Die Größe  $p$  ist nun die halbe Summe dieser zwei hydrostatischen Drucke.

1) J. Traube, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 7. Nr. 9. p. 200.

Nun ist *auch* in einer gekrümmten Kapillarschicht:

$$d\theta = -\rho dV^1)$$

oder:

$$dV = -v d\theta = -v d \frac{RT}{v-b} = -RTv d \frac{1}{v-b}.$$

Ist nun  $V'_1$  der Wert des Potentials, welches korrespondiert mit dem Punkt  $A$  der Fig. 4, so findet man durch Integration:

$$V - V'_1 = RT \log \frac{v-b}{v'_1-b} - RTb \left( \frac{1}{v-b} - \frac{1}{v'_1-b} \right).$$

Deshalb erhalten wir folgende Gleichung, welche den Mittelwert  $p$  der hydrostatischen Drucke in einem Punkte einer gekrümmten Kapillarschicht in ihrer Abhängigkeit zu dem reziproken Werte der Dichte ( $v = 1/\rho$ ) darstellt:

$$(29) \quad p = \frac{RT}{v-b} - \frac{1}{4a} \left\{ RT \log \frac{v-b}{v'_1-b} + RTb \frac{v-v'_1}{(v-b)(v'_1-b)} - \frac{2a}{v'_1} \right\}.$$

$v'_1$  hat nun Bezug auf den Punkt  $A$  statt auf den Punkt  $H$ , wie es bei der *ebenen* Kapillarschicht war;  $p$  und  $v$  sind selbstverständlich die laufenden Koordinaten.

#### Zusammenfassung.

1. Der Gradient des hydrostatischen Druckes  $p_1$ , senkrecht auf die Oberfläche einer kugelschalförmigen Kapillarschicht, ist das Produkt der Abweichung von dem Pascalschen Gesetz mit der Krümmung, oder wenn  $dh$  die Differentiale einer Strecke senkrecht auf die Oberfläche bedeutet, und  $p_2$  der Druck senkrecht auf diese Strecke ist:

$$\frac{dp_1}{dh} = \frac{2(p_1 - p_2)}{R},$$

wo  $2/R$  die Krümmung darstellt. Für eine ebene Kapillarschicht ist  $R = \infty$ , und deshalb:

$$p_1 = \text{Konstante} = \text{Dampfdruck.}$$

1) Was einfach aussagt, daß die Differenz zwischen den thermischen Drucken auf zwei gegenüberliegenden Seitenflächen eines Flüssigkeitselementes Gleichgewicht haben muß mit den Attraktionskräften, welche durch die Materie ringsum dieses Elementes auf das Flüssigkeitselement wirken.



2. Durch Integration der letzten Gleichung erhält man:

$$p_{af.} - p_a. = \frac{2}{R} \int_1^2 (p_1 - p_2) dh = \frac{2H}{R};$$

das ist die bekannte Gleichung von Lord Kelvin, welche die Abhängigkeit zwischen der Differenz der hydrostatischen Drucke  $p_a.$  in der Flüssigkeit und  $p_{af.}$  in dem Dampfe, in der Nähe einer gekrümmten Kapillarschicht einerseits und der Krümmung andererseits angibt.

3. Die Kurve, welche die Abhängigkeit zwischen dem hydrostatischen Druck  $p_1$  in der Richtung der Strecke  $h$  (senkrecht auf die Oberfläche der Schicht also) und dem reziproken Wert der Dichte in einem Punkte einer gekrümmten Kapillarschicht darstellt, hat einen Wendepunkt. (Vgl. die Kurven  $A_5 C_5$  etc. der Fig. 6.)

4. Die Kurve  $AEC$ , welche die Abhängigkeit darstellt (Fig. 4) zwischen der halben Summe der zwei Drucke  $p_1$  und  $p_2$  in einem Punkt, bez. in der Richtung der Kraftlinien und in einer Richtung *senkrecht* auf diese einerseits, und den reziproken Wert der Dichte  $v = 1/\rho$  in diesem Punkte andererseits, geht durch den Punkt  $E$  der theoretischen Isotherme, wo das thermodynamische Potential denselben Wert hat, wie in den homogenen Phasen  $A$  und  $C$ . In dem Punkt  $E$  hat die Kurve  $AEC$  ihre Minimumordinate, oder wie man auch sagen kann:

Jedes Punktepaar der Isotherme, wofür das thermodynamische Potential denselben Wert hat, Fig. 7 (wie  $A_5$  und  $C_5$ ,  $A_7$  und  $C_7$  etc.) entspricht oberhalb des geradlinigen Stückes  $HK$  der empirischen Isotherme einem Flüssigkeitströpfchen, derart, daß der Zustand innerhalb dieses Tröpfchens und der des Dampfes, welcher es umhüllt, durch die Lage dieses Punktepaares eindeutig bestimmt ist (n. l. durch den Druck und den reziproken Wert der Dichte). Ebenso entspricht jedes Punktepaar unterhalb des geradlinigen Stückes  $HK$  der empirischen Isotherme einer kugelförmigen Dampfblase. Der Zustand dieser Dampfblase und der Flüssigkeit, welche die Dampfblase umhüllt, ist wieder durch die Lage des Punktepaares (wie  $A_3$  und  $C_3$ ,  $A_2$  und  $C_2$  etc.) eindeutig bestimmt. Konstruiert man

nun für jede kugelschalförmige Kapillarschicht, welche im ersten Falle das kugelförmige Flüssigkeitströpfchen, und im zweiten Falle die kugelförmige Dampfblase umhüllt, die Kurve, welche den Mittelwert  $p = (p_1 + p_2)/2$  der Maximal- und Minimaldrucke für irgend einen Punkt dieser kugelschalförmigen Kapillarschichten in ihrer Abhängigkeit von dem reziproken Wert der Dichte darstellt, so bilden die Minima dieser Kurven gerade den labilen Teil der theoretischen Isotherme.

*Bemerkung:* In der Zeitschr. f. phys. Chem. 59. p. 231. 1907 habe ich die obigen Betrachtungen auf die Theorien des Siedens und des Kondensierens angewendet und u. a. gefunden, daß das Sieden einer Flüssigkeit gebunden ist an Differenzen zwischen den Temperaturen in den verschiedenen „Punkten“ der Masse.

(Eingegangen 22. Mai 1907.)

**9. Über die Dielektrizitätskonstante  
der Luft bei hohem Druck;  
von Karl Tangl.**

(Aus einer der ungar. Akad. d. Wissensch. am 22. April 1907 vorgelegten  
Abhandlung.)

Im Laufe einer Experimentaluntersuchung über Elektrostriktion sollte der Druckkoeffizient der Dielektrizitätskonstante ( $D$ ) von einigen isolierenden Substanzen bestimmt werden. Es bot sich da die Gelegenheit, die Dielektrizitätskonstante einiger Gase bei hohem Druck zu untersuchen. Über den Einfluß des Druckes stellte schon Boltzmann<sup>1)</sup> Untersuchungen an; aus seinen Versuchen schloß er, daß sich  $D - 1$  proportional dem Drucke ändert; der Druck wurde aber nur in engen Grenzen, in der Nähe von einer Atmosphäre geändert. Über das Verhalten der „permanenten“ Gase bei hohem Druck liegt meines Wissens nur die Arbeit von Occhialini<sup>2)</sup> über Luft vor. Die Resultate letzterer Arbeit gaben Veranlassung dazu, meine Beobachtungen über Luft schon jetzt, vor Abschluß der Untersuchung über andere Gase, zu publizieren. Die Luft bietet außerdem ein besonderes Interesse durch den Umstand, daß neuerdings L. Magri<sup>3)</sup> den Brechungsindex der Luft für  $\lambda = 546 \mu\mu$  bei hohem Druck (bis zu 180 Atm.) bestimmte, somit die Dielektrizitätskonstante für unendlich lange Wellen wertvolle Beiträge zur Kenntnis der Dispersion liefert.

**Methode und Versuchsanordnung.**

Es wurde der Nernstsche Apparat gebraucht. Da es sich aber um kleine Änderungen der Dielektrizitätskonstante handelt, konnte die Anordnung von Nernst in ihrer ursprünglichen Form nicht zum Ziele führen. Der Apparat wurde

1) L. Boltzmann, Wien. Ber. 69. p. 795. 1874; Pogg. Ann. (6) 5. p. 403—422. 1875.

2) A. Occhialini, Cim. (5) 10. p. 217—240. 1905; Physik. Zeitschrift 6. p. 669—672. 1905.

3) L. Magri, Physik. Zeitschr. 6. p. 629—632. 1905.

deshalb als Differentialinstrument eingerichtet, wie ihn wohl zuerst Philip<sup>1)</sup> und später Bädcker<sup>2)</sup> (bei Untersuchung der Dämpfe) gebrauchte. Die Versuchsanordnung zeigt Fig. 1.  $A$  und  $B$  sind zwei möglichst gleiche Kondensatoren von großer Kapazität;  $S_1$  und  $S_2$  die zwei Vergleichskondensatoren mit verschiebbarer Glasplatte,  $R_1$  und  $R_2$  zwei regulierbare

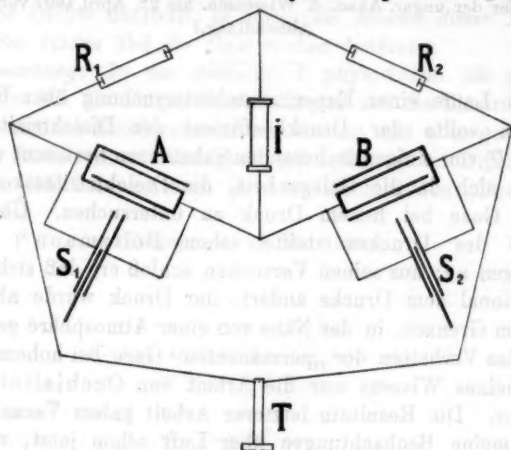


Fig. 1.

Flüssigkeitswiderstände (Mannit und Borsäure),  $J$  ein Induktor,  $T$  ein Telephon. Parallel zu  $A$  und  $B$  sind Flüssigkeitswiderstände geschaltet (in der Figur nicht gezeichnet).  $A$  und  $B$  konnte man mittels eines Paraffinkommutators vertauschen, ohne dabei  $S_1$  und  $S_2$  zu vertauschen;  $R_1$  und  $R_2$  konnten auch kommutiert werden.

Ist  $R_1 = R_2$ , so gibt das Telephon bekanntlich keinen Ton, wenn

$$A + S_1 = B + S_2$$

( $A, B, S_1, S_2$  bedeuten die bezüglichen Kapazitäten). Wird nun  $A$  und  $B$  vertauscht, so muß im allgemeinen die eine Glasplatte, z. B. die rechte, verschoben werden, um das Telephon wieder zum Schweigen zu bringen. Diese Ver-

1) J. C. Philip, Zeitschr. f. physik. Chem. 24. p. 18—38. 1897.

2) K. Bädcker, Zeitschr. f. physik. Chem. 36. p. 305—335. 1901.

schiebung soll im folgenden mit  $s$  bezeichnet werden. Wird dann die Luft in  $A$  komprimiert, so vergrößert sich die Kapazität von  $A$ , bei der Vertauschung von  $A$  und  $B$  muß dieselbe Glasplatte mit  $s'$  verschoben werden;  $s' - s$  ist proportional der Kapazitätsänderung von  $A$ .

Werden  $A$  und  $B$  groß genug gewählt, so kann  $s' - s$  noch gut meßbar sein, obzwar die prozentuelle Änderung der Kapazität sehr klein ist. Die Dimensionen der Kondensatoren  $A$  und  $B$  waren so gewählt, daß einer Kapazitätsänderung von  $\frac{1}{10000}$  eine eben noch wahrnehmbare Verschiebung der Glasplatte entsprach.

Um die Luft in  $A$  komprimieren zu können, wurde  $A$  in eine schmiedeeiserne Flasche gebracht, wodurch seine Kapazität etwas vergrößert wurde. Deshalb wurde die Form von  $A$  so gewählt, daß eine relative Lagenänderung von  $A$  in der Flasche möglichst wenig dessen Kapazität beeinflusste. Dies konnte man durch eine möglichst geschlossene Form erreichen.  $A$  und  $B$  waren aus coaxialen Zylindern zusammengesetzt, wie aus Fig. 2 ersichtlich. Die Höhe des äußersten Zylinders betrug 13,5 cm, der Durchmesser 4,8 cm, die Höhe der inneren Zylinder 11,0 cm; der Durchmesser derselben war so bemessen, daß zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zylindern ein ringförmiger Raum von 1 mm Breite frei blieb, der mit verschiedenen Dielektrika gefüllt werden konnte. Die Zylinder waren Messingröhren von 1 mm Wandstärke. Eine Reihe der Zylinder — die eine Belegung des Kondensators — wurde unten durch eine Platte von 5 mm Dicke zusammengehalten, die andere Reihe durch eine ebensolche Platte oben. Jede Platte trug in ihrer Mitte eine Hülse aus Messing, in die ein voller Glasstab stramm hineinpaßte, der die beiden Belegungen zusammenhielt. Außerdem waren zwischen die Zylinder kleine Hartgummikeile gesteckt, so daß keine Verschiebung der Zylinder zu befürchten war.

Die Flasche, in der die Luft komprimiert wurde, war aus Schmiedeeisen, von 19 cm Höhe, 6 cm innerem Durchmesser, 1,5 cm Wandstärke (Fig. 3). Sie war oben mit einem Schrauben-



Fig. 2.

gewinde versehen, um den Deckel daraufschrauben und fest anziehen zu können. Zur Abdichtung diente ein zwischen Flasche und Deckel gelegter Bleiring. Der Deckel selbst bestand aus zwei Teilen: aus einem mittleren und aus einem ringförmigen Stück. Die beiden Teile trennte ein Hartgummiring (in der Figur schraffiert), der zugleich zur Isolation des Mittelstückes diente. An das Mittelstück wurde der Kondensator angeschraubt. Das Mittelstück hatte ein seitliches Stahlrohr, welches das Metallmanometer trug und zugleich als Anschluß an die Kompressionspumpe diente. Im Mittelstück befand sich außerdem eine Stopfbüchse mit einem Ventil, womit die Flasche vom seitlichen Rohr abgesperrt werden konnte. Nachdem die Flasche an die Kompressionspumpe angeschlossen und mit komprimierter Luft gefüllt war, wurde das Ventil in der Stopfbüchse geschlossen, die Flasche von der Pumpe gelöst, das seitliche Rohr durch eine angeschraubte Kappe geschlossen, das Ventil wieder geöffnet, so daß das Manometer mit dem Inneren der Flasche in Verbindung stand und den Druck anzeigte.

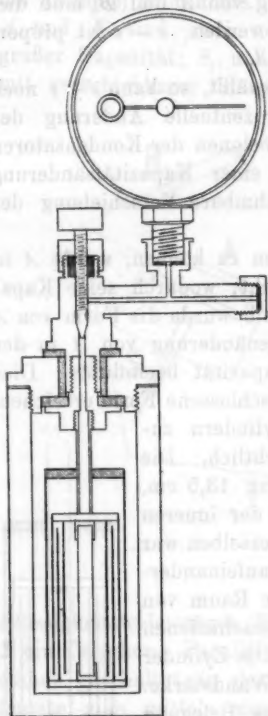


Fig. 3.

Die eine Belegung — die innere — war mit dem Mittelstück des Deckels leitend verbunden, die andere Belegung mittels einer am Boden der Flasche befindlichen elastischen Feder mit dem übrigen Teil der Flasche.

#### Versuche.

Die Luft wurde in der Flasche mit Hilfe einer Kompressionspumpe von Max Kohl zusammengepreßt. Bevor die

Luft in die Pumpe trat, ging sie durch eine gesättigte Lösung von Kalilauge, sodann durch zwei Glasröhren, mit in konzentrierter Schwefelsäure getränkten Bimssteinstücken gefüllt. Die Luft gelangte also kohlenstofffrei und trocken in die Flasche. Ich habe keine Versuche darüber angestellt, welchen Einfluß der Kohlenstoffgehalt auf die Dielektrizitätskonstante ausübt. Die Dielektrizitätskonstante der feuchten Luft fand ich aber merklich größer als die der trockenen; außerdem stört die Feuchtigkeit die Beobachtungen, denn komprimiert man feuchte Luft, so wird der Kondensator merklich leitend, das Minimum verwaschen, was wohl von dem auf der Isolation kondensierten Wasserdampf herrührt.

Die mit komprimierter Luft gefüllte Flasche kam in ein Wasserbad, dessen Temperatur während einer Versuchsreihe bis auf  $0,1^\circ$  konstant gehalten wurde, so daß wohl anzunehmen war, das Wasserbad zeige zugleich die Temperatur der Luft in der Flasche an. Anfangs arbeitete ich ohne Wasserbad, erhielt aber viel schwankendere Werte als später mit Wasserbad. Das Wasser reichte nur bis zum oberen Rande der Flasche.

Der Gang der Messung war dann folgender: Die Flasche, bis zu ca. 100 Atm. gefüllt, wurde ins Wasserbad gestellt, 3—4 Stunden danach die Verschiebung  $s$  der rechten Glasplatte gemessen, die sich beim Vertauschen von  $A$  mit  $B$  ergab. Dann wurde so viel Luft aus der Flasche herausgelassen, daß der Druck auf ca. 80 Atm. fiel, 45 Min. danach die entsprechende Verschiebung der Glasplatte gemessen; dann wurde wieder so viel Luft herausgelassen, daß der Druck auf ca. 60 Atm. fiel etc., bis der Druck gleich dem äußeren Luftdruck war. Nach jeder Druckverminderung kühlte sich die Luft und auch die Flasche ab, was sich dadurch bemerkbar machte, daß gleich nach dem Ausströmen der Luft die Verschiebung andere Werte zeigte als nach einer gewissen Zeit; ich überzeugte mich, daß schon nach 30 Min. die Verschiebung einen konstanten Wert annahm.

Bezeichnen  $p_0$  und  $p_1$  den Druck,  $D_0$  und  $D_1$  die zugehörigen Werte der Dielektrizitätskonstante der Luft,  $s_0$  und  $s_1$  die entsprechenden Verschiebungen der Glasplatte, so ist

$$D_1 - D_0 = k(s_1 - s_0),$$



wo  $k$  eine Konstante des Apparates ist, die bestimmt werden mußte. Dabei ist vorausgesetzt, daß die Kapazität von  $A$  + Flasche nur insofern vom Druck beeinflußt wird, als sich die Dielektrizitätskonstante der Luft mit dem Druck ändert, daß also keine Form- und Lagenänderungen eintreten, die die Kapazität beeinflussen können. Die durch den Druck verursachte Kompression des Kondensators  $A$  — aus der Kompressibilität des Messings berechnet — gibt selbst bei 100 Atm. nur eine Änderung von  $\frac{1}{15000}$  der Kapazität, was außerhalb der Beobachtungsgrenze liegt. Viel bedeutender ist die durch die Deformation der Flasche bewirkte Kapazitätsänderung. Der Deckel der Flasche ist selbst ein Kondensator, dessen Kapazität von der Deformation wohl beeinflußt werden kann. Außerdem ist noch zu beachten, daß der isolierende Hartgummiring den engen Raum zwischen dem mittleren und ringförmigen Teil des Deckels nicht vollständig ausfüllte (Fig. 3), sondern unten ein kleiner ringförmiger Raum frei blieb, der mit Luft gefüllt war; folglich mußte die Kapazität des Deckels mit dem Druck wachsen. Durch Versuche wurde auch festgestellt, daß die Kapazität der leeren Flasche (ohne Kondensator  $A$ ) mit dem Druck wächst.

Der Druck wurde mit einem Metallmanometer von der Firma Schaeffer & Budenberg gemessen. Das Manometer war mit großer Sorgfalt gefertigt, in kg pro cm<sup>2</sup> geteilt. Da der Stand des Zeigers bequem bis auf 0,1 Skt. genau abgelesen werden konnte, konnte der Druck bis auf 0,1 kg pro cm<sup>2</sup> genau bestimmt werden, insofern das Manometer bis auf 0,1 richtig ist. Diese Genauigkeit genügte auch, da die durch 0,1 kg pro cm<sup>2</sup> bewirkte Änderung der Dielektrizitätskonstante eben noch bemerkt werden konnte. Die Richtigkeit der Angaben des Manometers wurde folgenderweise geprüft: Die Flasche wurde mit Luft von ca. 3 Atm. Druck gefüllt, der Druck mit einer Quecksilbersäule gemessen. Sodann wurde so viel Luft herausgelassen, daß der Druck gleich dem äußeren Luftdruck wurde; das Volum der entwichenen Luft, auf bestimmten Druck und Temperatur reduziert, gemessen. Dann wurde die Flasche so weit gefüllt, daß das Manometer ca. 20 kg pro cm<sup>2</sup> anzeigte; dann so viel Luft entnommen, daß der Druck wieder gleich dem äußeren Luftdruck wurde;

das Volum der entströmten Luft, auf denselben Druck und Temperatur reduziert, gemessen. Daraus konnte man berechnen, wie groß der Druck in der Flasche war, als das Manometer 20 kg pro  $\text{cm}^2$  anzeigte. Ebenso wurde das Manometer bei 40, 60, 80, 100 kg pro  $\text{cm}^2$  geprüft. Bei der Berechnung mußte man natürlich die Abweichungen der Luft vom Boyle-Mariotteschen Gesetz berücksichtigen. Bei dieser Prüfung ergab sich, daß das Manometer bei 20 kg pro  $\text{cm}^2$  bis 0,1 genau ist, bei 40 kg pro  $\text{cm}^2$  um 0,1, bei 60, 80, 100 um 0,2 zu korrigieren ist.

Bei jeder Versuchsreihe wurde auch der äußere Luftdruck beobachtet, obzwar dessen Schwankungen nur dann einen bemerkbaren Einfluß auf das Manometer ausüben, wenn sie größer als 0,1 Atm. sind.

Die Bestimmung der Apparatenkonstante  $k$  bildete einen wichtigen Punkt der Untersuchung. Sie geschah folgendermaßen:  $A$  und  $B$  waren mit Luft von Atmosphärendruck gefüllt, es wurde die dazugehörige Verschiebung  $s_0$  der Glasplatte gemessen. Sodann sollte die Verschiebung  $s_1$  der Glasplatte bestimmt werden, wenn der Kondensator  $A$  mit Benzol von bestimmter Temperatur, also mit einer Flüssigkeit von bekannter Dielektrizitätskonstante  $D_1$ , gefüllt ist. Die Verschiebung  $s_1$  der Glasplatte ist aber viel zu groß, um unmittelbar bestimmt werden zu können;  $s_1$  betrug ca. 1000 mm, während die Glasplatte nur um 130 mm verschoben werden konnte. Ich nahm daher einen Gerdienkondensator zu Hilfe. Dieser besteht aus zwei Reihen koaxialer Zylinder, wovon die eine parallel der Achse verschoben und die Verschiebung an einer Millimeterskala abgelesen werden kann. Durch vorhergehende Versuche wurde festgestellt, wie groß die einer Verschiebung von 5 mm des Gerdienkondensators äquivalente Verschiebung der Glasplatte ist und zwar auf folgende Weise: Der Gerdienkondensator  $G$  war in einem Zweige des Nernstschens Apparates an der Stelle von  $A$  (Fig. 1), im anderen Zweige nur der Vergleichskondensator mit der Glasplatte  $S_2$  eingeschaltet. Beim Umschalten von  $A$  ergab sich eine Verschiebung  $s$  der Glasplatte. Dann wurde  $G$  von 0,0 auf 5,0 verschoben, also mit 5 mm. Bei Umschaltung von  $G$  ist jetzt die Verschiebung der Glasplatte  $s'$ ;  $s' - s$  ist die der Ver-

schiebung von  $G$  äquivalente Verschiebung der Glasplatte. So verfuhr ich weiter, bis  $G$  mit  $3 \times 5$  mm verschoben war; da war die Verschiebung der Glasplatte schon so groß, daß  $G$  nicht weiter verschoben werden konnte. Es wurde jetzt neben  $\delta_2$  ein Hilfskondensator  $K$  von entsprechender Kapazität geschaltet; beim Vertauschen von  $G$  und  $K$  war die Verschiebung der Glasplatte wieder klein genug, um  $G$  weiter mit  $3 \times 5$  verschieben und die äquivalente Verschiebung der Glasplatte messen zu können etc. Die folgende Tabelle gibt die Resultate dieser Messung. Ich teile die Zahlen mit, weil es vielleicht von Interesse ist zu sehen, mit welcher Annäherung die Kapazitätsänderung des Gerdienkondensators proportional der Verschiebung ist. Die mit  $G$  bezeichnete Kolumne gibt die Verschiebung von  $G$ ,  $s$  die damit äquivalente Verschiebung der Glasplatte.

$G$	$s$	$G$	$s$
0—5	1,0	40—45	67,7
5—10	4,2	45—50	68,0
10—15	37,6	50—55	67,9
15—20	68,3	55—60	68,1
20—25	68,5	60—65	68,6
25—30	68,7	65—70	68,7
30—35	68,5	70—75	68,9
35—40	68,3	75—80	71,0

Im Besitze dieser Daten konnte die Apparatenkonstante  $k$  wie folgt bestimmt werden: In einem Zweige des Nernstschen Apparates war  $A$ , im anderen Zweige  $B + G_0$  eingeschaltet ( $G_0$  bedeutet den Gerdienkondensator in der Stellung 0); die Verschiebung der Glasplatte beim Vertauschen von  $A$  und  $B + G_0$  sei  $s_0$ . Nun wurde  $A$  mit Benzol gefüllt,  $G$  auf 70 gestellt und noch ein kleiner Kondensator  $K$  dazu geschaltet; die Verschiebung  $s'$  der Glasplatte bei Vertauschung von  $A$  und  $B + G_{70} + K$  gemessen. Aus der vorigen Tabelle ergibt sich, daß  $G_{70} - G_0$  äquivalent ist mit einer Verschiebung von 794,1 mm der Glasplatte,  $K$  war äquivalent mit 167,2 mm. Aus diesen Daten und aus den zwei Verschiebungen  $s'$  und  $s_0$  berechnet sich: Wenn sich die Dielektrizitätskonstante des

Dielektrikums in  $A$  um 1,287 ändert, d. h.  $D_1 - D_0 = 1,287$ , so ändert sich die Verschiebung der Glasplatte um 990,2 mm, d. h.  $s_1 - s_0 = 990,2$ , und

$$k = \frac{D_1 - D_0}{s_1 - s_0} = 0,001300.$$

Dabei ist die Dielektrizitätskonstante der Luft bei  $18^\circ \text{C}$ . und 1 Atm. Druck = 1,00055 (nach Boltzmann<sup>1)</sup> und Klemenčič<sup>2)</sup>, während die Dielektrizitätskonstante des Benzols nach den sorgfältigen Messungen von Turner<sup>3)</sup> = 2,288 bei  $18^\circ \text{C}$ ., und dessen Temperaturkoeffizient nach meinen eigenen<sup>4)</sup> Messungen = - 0,00080 gesetzt ist.

Der angegebene Wert von  $s_1 - s_0$  ist das Mittel aus vier Messungen.

Diese Bestimmung wurde nach Beendigung der Versuchsreihen mit komprimierter Luft ausgeführt, ohne an dem Kondensator etwas zu ändern. Nach der Bestimmung von  $k$  wurde der Kondensator auseinander genommen, gereinigt, wieder zusammengesetzt, wonach  $k = 0,001297$  gefunden wurde. Die Berechnung der Dielektrizitätskonstante der Luft geschah mit  $k = 0,001300$ .

Das verwendete Benzol war von E. Merck bezogen, vor dem Gebrauch über Chlorkalzium destilliert.

#### V Versuchsergebnisse.

Auf die oben beschriebene Weise wurden insgesamt sechs Versuchsreihen ausgeführt. Die Verschiebung der Glasplatte wurde bei ca. 1, 20, 40, 60, 80, 100 Atm. Druck je viermal gemessen. Die Mittelwerte aus den vier Messungen gelten in den folgenden Tabellen als eine einzige Beobachtung. Die Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  waren möglichst abgeglichen, wurden aber doch nach jeder Messung kommutiert. In der Tabelle ist die Verschiebung der Glasplatte bei 1 Atm. Druck gleich 0,00 gesetzt. Die Beobachtung geschah nicht genau bei dem in der Tabelle angegebenen Druck; die angeführten Werte sind aus den direkt beobachteten mittels linearer Interpolation auf

1) L. Boltzmann, l. c.

2) J. Klemenčič, Wien. Ber. (2) 91. p. 712—759. 1885.

3) B. B. Turner, Zeitschr. f. physik. Chem. 35. p. 385—430. 1900.

4) K. Tangl, Ann. d. Phys. 10. p. 748—767. 1903.

den entsprechenden Druck reduziert. Der Druck ist überall bei  $19^{\circ}$  zu verstehen, in deren Nähe gemessen wurde.

Die Stellung der Glasplatte wurde auf 0,1 mm genau abgelesen; im Mittelwert der vier Beobachtungen sind die Hundertstel noch beibehalten. Die Glasplatte war sorgfältig kalibriert; die daraus sich ergebende Korrektur ist an den Werten der Tabelle schon angebracht.

Die so berechneten Werte mußten noch eine Korrektur erleiden wegen dem Umstande, daß die Kapazität der leeren Flasche selbst Änderungen durch den Druck erfuhr. Um diese Korrektur zu bestimmen, wurden fünf Versuchsreihen ausgeführt. An Stelle von *A* kam die leere Flasche, an Stelle von *B* ein kleinerer Kondensator. Sonst wurde ganz so verfahren wie früher beschrieben. Die folgende Tabelle gibt die der Kapazitätsänderung der leeren Flasche entsprechende Verschiebung der Glasplatte.

Druck in Atm.	1	20	40	60	80	100
I. Reihe	0,00	0,21	0,42	0,63	0,78	0,87
II. „	0,00	0,35	0,63	0,87	0,98	1,24
III. „	0,00	0,14	0,35	0,58	0,67	0,75
IV. „	0,00	0,34	0,56	0,72	0,94	1,16
V. „	0,00	0,28	0,39	0,54	0,63	0,71
Mittel	0,00	0,25	0,47	0,67	0,80	0,95

Mit der aus diesen Beobachtungen entspringenden Korrektur sind die Verschiebungswerte *s* der folgenden Tabelle schon versehen.

Druck in Atm.	1	20	40	60	80	100
I. Reihe	0,00	7,89	16,21	24,73	33,06	41,22
II. „	0,00	7,98	16,52	25,30	33,46	41,77
III. „	0,00	7,85	16,59	24,80	33,33	41,44
IV. „	0,00	8,01	16,47	25,13	33,45	41,96
V. „	0,00	7,92	16,25	24,83	33,38	41,87
VI. „	0,00	7,83	16,26	24,81	33,41	42,05
Mittel	0,00	7,91	16,38	24,93	33,35	41,72

Aus dem Mittelwert der einzelnen Kolumnen kann die Dielektrizitätskonstante der Luft sofort berechnet werden mit Hilfe der Formel:

$$D = D_0 + 0,001300 s,$$

wo  $D_0$  die Dielektrizitätskonstante der Luft bei 1 Atm. Druck und  $19^\circ \text{C.}$ ,  $s$  den in der obigen Tabelle angegebenen Mittelwert bezeichnet. Was  $D_0$  betrifft, so fand Boltzmann<sup>1)</sup> bei 1 Atm. und  $0^\circ$  1,000590, Klemenčič<sup>2)</sup> 1,000586; also kann man mit hinreichender Genauigkeit 1,00059 setzen. Bei 1 Atm. und  $19^\circ$  berechnet man  $D_0 = 1,00055$  auf Grund der experimentell festgestellten Tatsache, daß sich  $D - 1$  proportional der Dichte ändert (vgl. w. u.).

Die Werte der so berechneten Dielektrizitätskonstante sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt; der erste Wert von  $D$  bei  $P = 1$  Atm. ist aus Boltzmanns, der zweite aus Klemenčičs Beobachtungen abgeleitet.

$P$	$D$	$\sigma$	$\frac{1}{\sigma} \frac{D-1}{D+2} 10^6$	$\frac{D-1}{P} 10^6$	$\frac{D-1}{\sigma} 10^6$
1	1,000549	0,930	197	549	590
1	1,000545	0,930	195	545	586
20	1,0108	18,61	193	542	580
40	1,0218	37,82	191	546	578
60	1,0330	57,10	190	549	577
80	1,0439	76,18	189	549	576
100	1,0548	94,64	189	548	579

Die erste Vertikalreihe gibt den Druck in Atmosphären, die dritte die Dichte  $\sigma$  der Luft, wobei die Dichte bei 1 Atm. und  $0^\circ$  gleich eins gesetzt ist. Diese Werte sind aus Winkelmanns Handbuch der Physik (1. Aufl.) 1. p. 522 entnommen nach den Beobachtungen von Amagat. In der vierten Vertikalreihe steht der Wert des Clausius-Mossottischen Ausdruckes aus den vorhergehenden Daten berechnet. Die Zahlen der fünften und sechsten Reihe sind ohne weiteres verständlich.

1) Boltzmann, l. c.

2) J. Klemenčič, l. c.

Aus der Tabelle ist ersichtlich: 1. Meine Beobachtungen schließen sich an jene Boltzmanns, namentlich aber an jene Klemenčičs vorzüglich an. 2. Der Clausius-Mossottische Ausdruck ist nicht konstant; bis zu 100 Atm. zeigt er eine schwache Abnahme. 3. Der Quotient  $D - 1/P$  scheint bei 60—80 Atm. ein Maximum zu haben. Nach Amagat zeigt das Produkt  $PV$  ( $V$  = Volum) bei 64 Atm. ein Minimum. Ob  $D - 1/P$  in der Nähe dieses Druckes tatsächlich ein Maximum hat, müssen weitere Experimente entscheiden. 4.  $D - 1/\sigma$  kann bis 100 Atm. als konstant angesehen werden.

Von besonderem Interesse ist der Vergleich der Dielektrizitätskonstante mit dem Brechungsindex; letzteren hat L. Magri<sup>1)</sup> für  $\lambda = 546 \mu\mu$  bis zu 180 Atm. bestimmt. In seiner Abhandlung gibt er den Brechungsindex nach der Dichte geordnet, die Dichte der Luft bei 1 Atm. und  $0^\circ$  gleich 1 gesetzt. Der Vergleich ist in der folgenden Tabelle bei der Dichte 1, 20, 40, 60, 80, 100 ausgeführt.

$\sigma$	$D$	$n^2$
1	1,000590	} 1,000586
1	1,000586	
20	1,0116	1,0117
40	1,0231	1,0237
60	1,0346	1,0357
80	1,0462	1,0477
100	1,0579	1,0601

Das Quadrat des Brechungsindex ist durchwegs größer als die Dielektrizitätskonstante für unendlich lange Wellen. Der Unterschied ist zwar klein, jedoch größer, als daß er Beobachtungsfehlern zuzuschreiben wäre. Inwiefern die gefundenen Werte mit der elektromagnetischen Theorie der Dispersion im Einklange sind, läßt sich nicht entscheiden, da über die Dispersion der Luft bei hohem Druck zu wenig Daten vorliegen.

Die Genauigkeit der Resultate hängt von der Genauigkeit dreier Größen ab: des Druckes, der Konstante  $k$  und der Verschiebung der Glasplatte. Die Genauigkeit des Manometers

1) L. Magri, l. c.



kann man sicher auf 0,1 Atm. setzen, was in  $D - 1$  bei 20 Atm. einem Fehler von  $\frac{1}{200}$ , bei 40 Atm.  $\frac{1}{400}$  etc. gleichkommt. Bei der Beurteilung der Genauigkeit der Konstante  $k$  ist maßgebend, mit welcher Genauigkeit die einer Verschiebung von 70 mm des Gerdienkondensators entsprechende Verschiebung der Glasplatte bestimmt werden konnte. Die 70 mm konnten auf 0,05 mm genau gemessen werden, d. i. auf  $\frac{1}{1400}$  genau; ferner ist zu beachten, daß der Gerdienkondensator, wie erwähnt, mit  $3 \times 5$  mm verschoben werden konnte, ohne in den anderen Zweig des Nernstschen Apparates einen Hilfskondensator einzuschalten; die äquivalente Glasplattenverschiebung ist rund 200 mm. Die Genauigkeit dieser äquivalenten Verschiebung kann auch auf  $\frac{1}{1400}$  gesetzt werden (etwas mehr als 0,1 mm), so daß der Wert der einer Verschiebung des Gerdienkondensators von 70 mm äquivalenten Glasplattenverschiebung auf  $\frac{1}{700}$  genau angenommen werden kann. Die Dielektrizitätskonstante des Benzols gibt Turner auf  $\frac{1}{3000}$  genau an. Auf Grund dieser Betrachtung kann die Genauigkeit der Apparatenkonstante auf  $\frac{1}{700}$  gesetzt werden.

Die aus der Ablesung des Manometers und der Stellung der Glasplatte herrührenden zufälligen Fehler bewirken die Schwankungen der in der Tabelle angegebenen  $s$ -Werte in den einzelnen Versuchsreihen. Den daraus entspringenden wahrscheinlichen Fehler des Mittelwertes kann man nach den Regeln der Fehlerrechnung berechnen. Tut man das, so erhält man als wahrscheinlichen Fehler von  $D - 1$  bei 20 und 40 Atm.  $\frac{1}{300}$ , bei 60, 80, 100 Atm.  $\frac{1}{240}$ , wobei der Fehler des Korrektionsgliedes aus der Kapazitätsänderung der leeren Flasche mit berücksichtigt ist. Zieht man sämtliche Fehlerquellen in Betracht, so kann man sagen:  $D - 1$  ist bei 20 Atm. bis auf  $\frac{1}{100}$ , bei 40 und 60 Atm. auf  $\frac{1}{120}$ , bei 80 Atm. auf  $\frac{1}{140}$ , bei 100 Atm. auf  $\frac{1}{160}$  genau.

Vergleicht man die Resultate dieser Arbeit mit jener Occhialinis<sup>1)</sup>, so findet man viel bedeutendere Abweichungen, als nach obiger Berechnung der Genauigkeit zu erwarten sind. Der Vergleich ist in der folgenden Tabelle ausgeführt.

1) Occhialini, l. c.

$\sigma$	$D$	
	Occhialini	Tangl
20	1,0101	1,0116
40	1,0196	1,0231
60	1,0294	1,0346
80	1,0387	1,0462
100	1,0482	1,0579

Die Abweichungen sind viel zu groß, um sie zufälligen Beobachtungsfehlern zuschreiben zu können. Die Zahlen Occhialinis passen auch sehr schlecht zu Boltzmanns und Klemenčičs Werten bei 1 Atm., wie die folgende Tabelle zeigt, wo die Werte von  $\frac{1}{\sigma} \frac{D-1}{D+1}$  und  $\frac{D-1}{\sigma}$  zusammengestellt sind.

$\sigma$	$\frac{1}{\sigma} \frac{D-1}{D+1} \cdot 10^6$	$\frac{D-1}{\sigma} \cdot 10^6$	
1	197	590	Boltzmann
1	195	586	Klemenčič
20	169	505	Occhialini
40	162	490	"
60	162	490	"
80	159	484	"
100	158	482	"

Den Grund der bedeutenden Abweichungen sehe ich hauptsächlich in folgenden Umständen: Im Grunde genommen verglich Occhialini die Kapazität seines Versuchskondensators mit einem Kondensator, dessen Kapazität aus den Dimensionen berechnet wurde. Dieser Vergleichskondensator bestand aus zwei gleichgroßen quadratischen Platten, deren gegenseitiger Abstand geändert und gemessen werden konnte. Seine Kapazität berechnet Occhialini nach Maxwell<sup>1)</sup> mit der Formel

$$C = \frac{\left(a + \frac{d}{\pi} \log 2\right)^2}{4\pi d},$$

wo  $a$  nahe gleich der Seitenlänge des Quadrates,  $d$  gleich der Entfernung der beiden Platten voneinander ist. Jedoch bezieht

1) J. C. Maxwell, Treatise on Electr. and Magnet. (Deutsche Ausgabe) § 196. p. 813.

sich die Formel Maxwells auf einen Kondensator, der aus zwei parallelen und einer dazwischen gelegten, von beiden äußeren gleich weit entfernten Platten besteht, wobei aber die Mittelplatte viel kleiner angenommen wird als die beiden äußeren. Ist die Entfernung der beiden äußeren Platten voneinander gleich  $B$ , so ist in erster Annäherung die Kapazität  $C = S/2\pi B$ , wo  $S$  den wahren Flächeninhalt der Mittelplatte bedeutet. Zieht man die Wirkung der Ränder in Betracht, so wird  $C = S'/2\pi B$ , wo nach Maxwell  $S'$  aus  $S$  entsteht, wenn man um den Rand der Mittelplatte einen Streifen von der konstanten Breite  $B/\pi \log 2$  legt,  $S'$  bedeutet den so vergrößerten wahren Flächeninhalt der Mittelplatte. Sind die Platten quadratisch mit der Seitenlänge  $a$ , so wird demnach

$$S = 2a^2 \quad \text{und} \quad S' = 2 \left( a + 2 \frac{B}{\pi} \log 2 \right)^2.$$

Ist die Mittelplatte unendlich dünn und seine Entfernung von den äußeren Platten gleich  $d$ , so ist  $B = 2d$  und

$$C = \frac{2 \left( a + \frac{4d}{\pi} \log 2 \right)^2}{4\pi d}.$$

Nun bestand aber der Kondensator Occhialinis nicht aus drei, sondern nur aus zwei Platten und es gilt nur mit einer gewissen Annäherung, daß die Kapazität des aus zwei Platten bestehenden Kondensators die Hälfte jener aus drei Platten ist. Aber selbst wenn man sich mit dieser Annäherung begnügt, ist

$$C = \frac{\left( a + \frac{4d}{\pi} \log 2 \right)^2}{4\pi d},$$

während im Zähler der Formel, die Occhialini anwandte,

$$\left( a + \frac{d}{\pi} \log 2 \right)^2$$

steht. Occhialini nahm also die Kapazität seines Kondensators infolge dieses Rechenfehlers zu klein an und zwar mit ca. 8 Proz. Um ebensoviel kleiner mußte der Wert von  $D - 1$  der Luft ausfallen. Außerdem ist die Anwendung der Formel Maxwells auf Occhialinis Kondensator auch deshalb bedenklich, weil er aus zwei gleich großen Platten bestand, während Maxwell die Mittelplatte bedeutend kleiner annimmt.

## Zusammenfassung.

1. Es wurde die Dielektrizitätskonstante der Luft bis zu 100 Atm. Druck gemessen und folgende Werte gefunden:

$P$	$D$
20	$1,0108 \pm 0,0001$
40	$1,0218 \pm 0,0002$
60	$1,0330 \pm 0,0003$
80	$1,0439 \pm 0,0003$
100	$1,0548 \pm 0,0003$

Die Werte beziehen sich auf  $19^{\circ}$  C.

2. Der Clausius-Mossottische Ausdruck  $\frac{1}{\sigma} \frac{D-1}{D+2}$  zeigt eine schwache Abnahme mit wachsendem Druck.

3. Der Quotient  $\frac{D-1}{\sigma}$  kann bis zu 100 Atm. konstant angenommen werden.

4. Das Quadrat des Brechungsindex für  $\lambda = 546 \mu\mu$  ist größer als die Dielektrizitätskonstante für unendlich lange Wellen; jedoch bleibt die Differenz klein.

(Eingegangen 10. Mai 1907.)

**10. Die magnetische Induktion  
in Rotationskörpern bei homogenem Felde,  
behandelt nach einem Näherungsverfahren auf  
experimentell-geometrischer Grundlage;  
von O. Grotrian.**

Die Theorie der magnetischen Induktion, wie sie von Poisson begründet, von Lord Kelvin, F. Neumann, Maxwell, Kirchhoff u. a. weiter ausgebaut worden ist, gestattet nur für wenige Fälle die Verteilung der Magnetisierung im Innern eines magnetisierbaren Körpers zu berechnen. Für Probleme, bei denen die exakte Theorie versagt, kann man die Näherungsmethode der fortgesetzten Superposition verwenden, deren sich zuerst Murphy bei Untersuchung der elektrischen Influenz bediente.<sup>1)</sup>

Andererseits sind bekanntlich auch Versuche, namentlich solche mit Induktionsschleifen, die mit einem ballistischen Galvanometer verbunden eng um den Magneten herumgelegt sind, geeignet, Aufschluß zunächst über die Verteilung der magnetischen Oberflächenbelegung zu geben. Kennt man diese, so ist damit auch für jede Stelle im Innern des Magneten die wahre magnetische Kraft nach Größe und Richtung, sowie ihr Potential bestimmt und damit auch bei magnetisch weichem Material unter Voraussetzung konstanter Suszeptibilität der in diesem Falle übereinstimmende Verlauf der Kraft-, Induktions- und Magnetisierungslinien, sowie derjenige der Niveaulinien.

Die genäherte Berechnung der entsprechenden Größen soll im folgenden für den Fall eines Rotationskörpers versucht werden, dessen Achse den Kraftlinien des erregenden homogenen Feldes parallel liegt. Es mag diese Berechnung auf Wegen

1) Vgl. hierzu Beer, Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Elektrodynamik p. 155. 1865; C. Neumann, Das logarithmische Potential p. 248; L. Weber, Zur Theorie der magnetischen Induktion, Kiel 1877, Beibl. 2. p. 230. 1878; E. Riecke, Wied. Ann. 13. p. 465. 1881; A. Wassmuth, Wiener Ber. 102 (2a). p. 65. 1893.

geschehen, die, wie mir scheint, in immerhin ausführbarer Weise den Verlauf der inneren Magnetisierungslinien und der dazu senkrechten Niveaulächen zu ermitteln gestatten. Bei dem einen dieser Wege wird zu dem mittels der Induktionsschleifen erhaltenen Experimentalergebnisse als zweites der Verlauf der äußeren Kraftlinien, der sich durch Eisenpulver ermitteln läßt, hinzugenommen.

In einem homogenen Magnetfelde von der Intensität  $\mathfrak{H}$ , befindet sich ein in bezug auf eine Äquatorialebene  $EE$  symmetrischer Rotationskörper  $RR$  aus weichem Eisen, dessen Achse  $AA$  den Kraftlinien des Feldes parallel sei (vgl. Fig. 1).<sup>1)</sup>

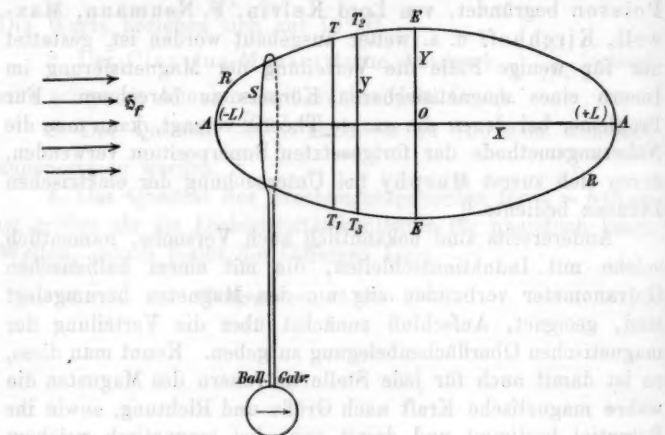


Fig. 1.

Es wird dabei vorausgesetzt, daß das Material vollständig magnetisch weich, also frei von Remanenz sei, ferner daß Suszeptibilität  $\chi$  und Permeabilität  $\mu$  als gegeben und konstant angesehen werden.

In diesem Falle ist die Verteilung der Magnetisierung eine solenoidale und zugleich einfach lamellare. Das Gleiche gilt für die wahre magnetische Kraft  $\mathfrak{H}$  und die Induktion  $\mathfrak{B}$ .

1) Die Darstellung des Körpers in der Figur als Rotationsellipsoid soll selbstverständlich keine Beschränkung auf diese Körperform, für welche ja die exakte Lösung bekannt ist, bedeuten.

Es sei nun durch eng anliegende Induktionsschleifen  $S$ , mit denen man eine Anzahl von zur Achse senkrechten Querschnitten umschnürt, der diese Querschnitte durchsetzende Induktionsfluß  $\beta$  ermittelt.<sup>1)</sup> Der ballistische Ausschlag kann durch Verschwinden- oder Entstehenlassen des Feldes, sowie auch durch schnelle Bewegung der Schleife in große Entfernung hervorgerufen werden. Ferner seien durch Eisenpulver die äußeren Kraftlinien in ihrem Verlaufe, namentlich auch deren Inzidenzwinkel  $\alpha_0$  in Luft an der Oberfläche bestimmt. Damit ist auch der Brechungswinkel  $\beta_0$  im Eisen zufolge der Beziehung

$$(1) \quad \frac{\operatorname{tg} \beta_0}{\operatorname{tg} \alpha_0} = \mu$$

gegeben.

Es mag nun der Mittelpunkt  $O$  des Rotationskörpers zum Anfangspunkte eines Koordinatensystems gewählt werden, dessen  $X$ -Achse mit der Achse des Rotationskörpers zusammenfällt, so daß die  $Y$ -Achse in den Schnitt irgend einer Meridianebene, z. B. der Zeichenebene, mit der Äquatorebene zu liegen kommt. Die auf der Meridiankurve vom Äquator aus abgemessenen Längen mögen durch  $l$  bezeichnet und als positiv oder negativ betrachtet werden, je nachdem man sich beim Fortschreiten längs  $l$  der positiven oder negativen  $X$ -Achse nähert. Dabei möge der positive Sinn der letzteren mit dem positiven Sinne des äußeren Feldes übereinstimmen. Die Länge der halben Meridiankurve zwischen Äquator und Achse werde durch  $L$  bezeichnet.

Man kann nun auf Grund der Versuche eine Kurve konstruieren, die als Abszissen die Werte von  $l$ , als Ordinaten diejenigen von  $\beta$  besitzt

(vgl. Fig. 2). Somit ist es möglich, für einen beliebigen Punkt der Meridiankurve den Wert von  $\beta$  und durch Ziehen der Tangente denjenigen von  $\partial\beta/\partial l = \pm \operatorname{tg} \gamma$  zu ermitteln. Es ist

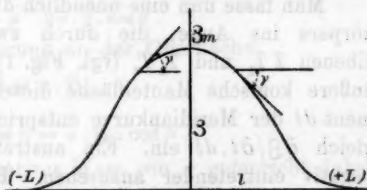


Fig. 2.

1) Über derartige Versuche vgl. u. a. C. Benedicks, Ann. d. Phys. 6. p. 726. 1901; O. Grotrian, Wied. Ann. 57. p. 751. 1896.



ohne weiteres ersichtlich, daß aus der Kurve für  $\beta$  die Differentialkurve (vgl. Fig. 3), die  $\partial\beta/\partial l$  als Funktion von  $l$  dar-

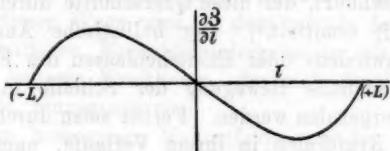


Fig. 3.

stellt, abgeleitet werden kann. Da der Verlauf der Kraftlinien an der Oberfläche bekannt ist, erscheint es ferner mög-

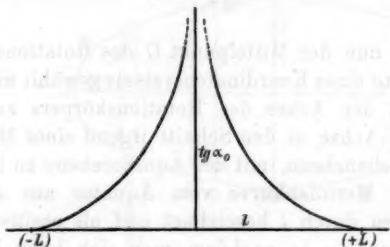


Fig. 4.

lich, eine Kurve (vgl. Fig. 4) zu konstruieren, welche die Werte von  $l$  als Abszissen, diejenigen von  $\operatorname{tg} \alpha_0$  als Ordinaten enthält.

Man fasse nun eine unendlich dünne Scheibe des Rotationskörpers ins Auge, die durch zwei zur Achse senkrechte Ebenen  $T_1$  und  $T_2$  (vgl. Fig. 1) begrenzt ist. Durch die äußere konische Mantelfläche dieser Scheibe, die einem Element  $dl$  der Meridiankurve entspricht, tritt ein Induktionsfluß gleich  $\partial\beta/\partial l \cdot dl$  ein. Ein austretender Fluß ist dabei als negativ eintretender anzusehen. Bezeichnet  $y$  die Ordinate für das Element  $dl$ , dann ist die Mantelfläche der Scheibe durch  $2\pi y \cdot dl$  dargestellt. Somit ergibt sich für die magnetische Kraft außen unendlich nahe der Mantelfläche der Ausdruck

$$\mathfrak{H}_a = \frac{\frac{\partial\beta}{\partial l} \cdot dl}{2\pi \cdot y \cdot dl \cdot \cos \alpha_0} = \frac{\frac{\partial\beta}{\partial l}}{2\pi \cdot y \cdot \cos \alpha_0}.$$

Bezeichnet nun  $\mathfrak{H}_a$  die Normalkomponente von  $\mathfrak{H}$ ,  $\mathfrak{H}_t$

diejenige der inneren Kraft  $\mathfrak{H}_i$  unendlich nahe der Oberfläche, dann gilt die Beziehung

$$\mu = \frac{\mathfrak{H}_a}{\mathfrak{H}_i} = \frac{\mathfrak{H}_a \cdot \cos \alpha_0}{\mathfrak{H}_i \cdot \cos \beta_0}.$$

Für die weiteren Entwicklungen ist es zweckmäßig, statt der spitzen Winkel  $\alpha_0$  und  $\beta_0$  diejenigen Winkel einzuführen, welche die Richtung von  $\mathfrak{H}_a$  und  $\mathfrak{H}_i$  mit der nach außen hin als positiv betrachteten Richtung der Normale bildet. Bezeichnet man diese Winkel durch  $\alpha$  und  $\beta$ , dann ist bei ein-  
tretendem Flusse

$$\alpha = \pi - \alpha_0, \quad \beta = \pi - \beta_0,$$

bei austretendem Flusse

$$\alpha = \alpha_0, \quad \beta = \beta_0.$$

Die beiden letzten Gleichungen erhalten dann die Form

$$(2) \quad \mathfrak{H}_a = - \frac{\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial l}}{2\pi \cdot y \cdot \cos \alpha},$$

$$\mu = \frac{\mathfrak{H}_a \cdot \cos \alpha}{\mathfrak{H}_i \cdot \cos \beta}.$$

Es ist folglich

$$\mathfrak{H}_i = \frac{\mathfrak{H}_a \cdot \cos \alpha}{\mu \cdot \cos \beta}.$$

Hieraus erhält man durch Substitution von  $\mathfrak{H}_a$  aus (2)

$$(3) \quad \mathfrak{H}_i = - \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial l}}{2\pi \cdot y \cdot \cos \beta}.$$

Nun ist die Magnetisierung an der Oberfläche

$$\mathfrak{Z} = \kappa \cdot \mathfrak{H}_i,$$

die Flächendichte

$$(4) \quad \sigma = \mathfrak{Z} \cdot \cos \beta = \kappa \cdot \mathfrak{H}_i \cdot \cos \beta.$$

Ein positiver oder negativer Wert von  $\sigma$  entspricht dabei einer Stelle mit nord- oder südmagnetischer Dichte.

Durch Substitution von  $\mathfrak{H}_i$  aus (3) ergibt sich somit für die Dichte der Ausdruck

$$(5) \quad \sigma = - \frac{\kappa}{\mu} \cdot \frac{\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial l}}{2\pi \cdot y}.$$

Da für jede Stelle der Oberfläche  $\sigma$  berechnet werden kann, so ist damit die Verteilung der magnetischen Oberflächen-

schicht gegeben.<sup>1)</sup> Hiernach ist es möglich eine Kurve (vgl. Fig. 5) zu konstruieren, welche die Werte von  $l$  als Abszissen, diejenigen von  $\sigma$  als Ordinaten besitzt.

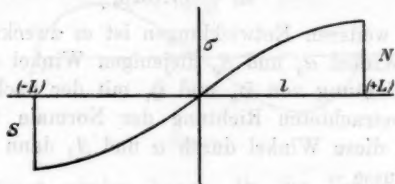


Fig. 5.

Zur Bestimmung der Niveauflächen und der unter den gemachten Voraussetzungen zusammenfallenden Magnetisierungs-, Kraft- und Induktionslinien möchte ich zwei Methoden, die sich außerdem kombinieren lassen, in Vorschlag bringen. Dieselben sollen im folgenden besprochen werden.

Zunächst handelt es sich darum, die Potentialverteilung in der Achse des Rotationskörpers zu ermitteln.

In einem Punkte  $p$  der Achse mit der Abszisse  $\xi$  (vgl. Fig. 6) erzeugt eine Zone vom Radius  $y$  mit der Dichte  $\sigma$ , die

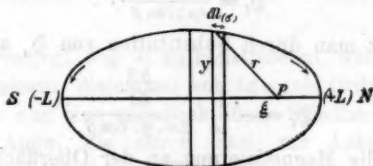


Fig. 6.

durch zwei unendlich nahe zur Achse senkrechte Ebenen begrenzt ist, ein Potential

$$dV_{\sigma} = \frac{2\pi \cdot y \cdot \sigma \cdot dl}{r}.$$

Zufolge der Gleichung (5) kann dieses auch dargestellt werden durch den Ausdruck

$$(6) \quad dV_{\sigma} = -\frac{\mu}{r} \frac{\partial \xi}{\partial l} \cdot dl.$$

<sup>1)</sup> Zu den vorstehenden Entwicklungen vgl. u. a. E. Mascart u. J. Joubert, Lehrb. der Elektrizität u. des Magnetismus 1. Art. 417—418.

Das gesamte Potential der entmagnetisierenden Kraft, auch als induziertes Potential bezeichnet, welches durch die ganze magnetische Oberflächenschicht erzeugt wird, ist somit gegeben durch den Ausdruck

$$(7) \quad V_{\sigma} = - \frac{\kappa}{\mu} \int_{-L}^{+L} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial l} \cdot \frac{dl}{r}.$$

Teilt man demnach die Oberfläche des Rotationskörpers in eine genügend große Anzahl von Zonen ein und ermittelt für jede aus einer in hinreichend großem Maßstabe gezeichneten Meridiankurve den Wert von  $r$ , dann kann hieraus eine Kurve abgeleitet werden, welche  $r$  als Ordinaten,  $l$  als Abszissen besitzt. Aus dieser und der Kurve in Fig. 3 für  $\partial \mathfrak{B} / \partial l$  kann für jedes  $l$  der Wert  $\frac{\partial \mathfrak{B} / \partial l}{r}$ , somit auch

$$- \frac{\kappa}{\mu} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial l} \frac{1}{r} = \frac{dV_{\sigma}}{dl}$$

abgeleitet werden. Es ist somit möglich, für irgend ein  $\xi$  eine

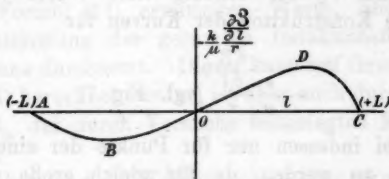


Fig. 7.

Kurve (vgl. Fig. 7) zu konstruieren, welche  $l$  als Abszissen und die Werte von

$$- \frac{\kappa}{\mu} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial l} \frac{1}{r}$$

als Ordinaten besitzt.

Die Kurve geht durch den Anfangspunkt des Koordinatensystems, da  $\partial \mathfrak{B} / \partial l = 0$  für  $l = 0$  ist, und wird durch diesen in zwei Teile, einen mit positiven und einen mit negativen Ordinaten geteilt. Die Gesamtfläche zwischen Kurve und

Abszissenachse, algebraisch planimetriert, (also der Figur entsprechend Fläche  $OCD - OAB$ ) stellt alsdann

$$-\frac{x}{\mu} \int_{-L}^{+L} \frac{\partial g}{\partial l} \frac{dl}{r} = V_o$$

das Potential der entmagnetisierenden Kraft im Punkte  $p$  (vgl. Fig. 7) mit der Abszisse  $\xi$  dar. Man erkennt leicht, daß für den Mittelpunkt des Rotationskörpers ( $\xi = 0$ ) die beiden Zweige der Kurve in Fig. 7 kongruent werden und daher hier  $V_o = 0$  ist.

Das Gesamtpotential  $V_\xi$  der wahren magnetischen Kraft im Punkte  $p$  der Achse erscheint als Summe des von dem homogenen Felde herrührenden oder induzierenden Potentials  $V_f$  und von  $V_o$ . Es ist somit

$$(8) \quad V_\xi = V_f + V_o.$$

Dabei ist

$$V_f = -\mathfrak{F}_f \cdot \xi.$$

Nach den vorstehenden Ausführungen ist es möglich, das Gesamtpotential  $V_\xi$  für beliebig viele Werte von  $\xi$  zu ermitteln. Die Konstruktion der Kurven für

$$-\frac{x}{\mu} \frac{\partial g}{\partial l} \quad (\text{vgl. Fig. 7})$$

braucht dabei indessen nur für Punkte der einen Halbachse durchgeführt zu werden, da für gleich große positive oder

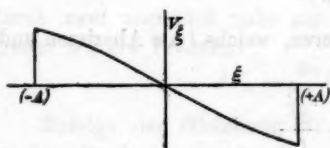


Fig. 8.

negative Werte von  $\xi$  sich diejenigen von  $V_o$  nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Es kann somit eine Kurve  $V_\xi, \xi$  (vgl. Fig. 8) konstruiert werden, durch welche das Gesamtpotential für jeden Punkt der Achse dargestellt wird.

Bezeichnen  $x$  und  $y$  die Koordinaten eines beliebigen Punktes im Eisen, genommen in der durch den Punkt gelegten Meridianebene, bedeutet ferner  $V$  das in demselben vorhandene

Gesamtpotential, dann läßt sich die Laplacesche Gleichung in der Form schreiben

$$(9) \quad \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 V}{\partial y^3} + \frac{1}{y} \frac{\partial V}{\partial y} = 0.$$

Das Integral derselben wird bei Verwendung von Besselschen Funktionen dargestellt durch die Reihe

$$(10) \quad V = V_\xi - \frac{\partial^2 V_\xi}{\partial x^2} \cdot \frac{y^2}{2^2} + \frac{\partial^4 V_\xi}{\partial x^4} \cdot \frac{y^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{\partial^6 V_\xi}{\partial x^6} \cdot \frac{y^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$$

$V_\xi$  muß sich durch eine ungerade Funktion von  $x$  (bez. von  $\xi$ , wenn es sich speziell um Punkte in der Achse handelt) darstellen lassen und für  $x = 0$  zu Null werden (vgl. den Verlauf der Kurve in Fig. 8), also die Form besitzen<sup>1)</sup>

$$(11) \quad V_\xi = a_1 \cdot x + a_3 \cdot x^3 + a_5 \cdot x^5 + \dots$$

Da aus der Kurve in Fig. 8 die Koeffizienten  $a_1, a_3, a_5 \dots$  bestimmbar sind, läßt sich auch der Ausdruck für  $V$  mit beliebig vielen Gliedern der Reihe darstellen. Wie viele Glieder zur Berechnung von  $V$  erforderlich sind, wird von der Form des Rotationskörpers abhängen. Ein Kriterium dafür ist gegeben einerseits durch Vergleichung der für  $V_\xi$  aus der Kurve und aus Formel (11) ermittelten Werte, andererseits auch durch Bestimmung des gesamten Induktionsflusses, der die Äquatorebene durchsetzt. Dieser kann auf Grund der Formeln (10) und (11) berechnet werden, ist aber auch durch die Maximalordinate  $\beta_m$  der durch Versuche festgelegten Kurve in Fig. 2 dargestellt.

Zunächst ist die  $X$ -Komponente  $\mathfrak{H}_x$  der magnetischen Kraft an irgend einer Stelle im Eisen gegeben durch die Gleichung

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{H}_x = - \frac{\partial V}{\partial x} = - \frac{\partial V_\xi}{\partial x} + \frac{\partial^3 V_\xi}{\partial x^3} \cdot \frac{y^2}{2^2} - \frac{\partial^5 V_\xi}{\partial x^5} \cdot \frac{y^4}{2^2 \cdot 4^2} \\ + \frac{\partial^7 V_\xi}{\partial x^7} \cdot \frac{y^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} - \dots \end{aligned} \right.$$

1) Vgl. hierzu A. Beer, Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Elektrodynamik, p. 196. 1865. An die Stelle der l. c. angewandten Bezeichnungen  $f, z, t, A$  sind oben die Zeichen  $V, x, y, V_\xi$  gesetzt. Ferner E. Mascart u. J. Joubert, Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus 1. Art. 365.

Dabei ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_z}{\partial x} &= a_1 + 3 \cdot a_3 \cdot x^2 + 5 \cdot a_5 \cdot x^4 + 7 \cdot a_7 \cdot x^6 + \dots \\ \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} &= 6 a_3 \cdot x + 20 \cdot a_5 \cdot x^3 + 42 \cdot a_7 \cdot x^5 + \dots \\ \frac{\partial^3 V_z}{\partial x^3} &= 6 a_3 + 60 \cdot a_5 \cdot x^2 + 210 \cdot a_7 \cdot x^4 + \dots \\ \frac{\partial^4 V_z}{\partial x^4} &= 120 \cdot a_5 \cdot x + 840 \cdot a_7 \cdot x^3 + \dots \\ \frac{\partial^5 V_z}{\partial x^5} &= 120 \cdot a_5 + 2520 \cdot a_7 \cdot x^2 + \dots\end{aligned}$$

Für die Äquatorebene ist  $x=0$ . Die Differentialquotienten erhalten hier die Werte

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x}\right)_e &= a_1, \quad \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2}\right)_e = 0, \quad \left(\frac{\partial^3 V_z}{\partial x^3}\right)_e = 6 \cdot a_3, \\ \left(\frac{\partial^4 V_z}{\partial x^4}\right)_e &= 0, \quad \left(\frac{\partial^5 V_z}{\partial x^5}\right)_e = 120 a_5 \dots\end{aligned}$$

Offenbar ist  $(\partial V_z / \partial x)_e$  durch die Neigungstangente der Kurve in Fig. 8 im Nullpunkte gegeben. Bezeichnet demnach  $\mathfrak{H}_0$  den Wert der magnetischen Kraft im Mittelpunkt, dann ist

$$\left(\frac{\partial V_z}{\partial x}\right)_e = a_1 = -\mathfrak{H}_0.$$

Die magnetische Kraft  $\mathfrak{H}_e$  in der Äquatorebene, die zu letzterer senkrecht gerichtet ist, wird somit dargestellt durch den Ausdruck

$$(13) \quad \mathfrak{H}_e = \mathfrak{H}_0 + \frac{3}{2} \cdot a_3 \cdot y^2 - \frac{15}{8} \cdot a_5 \cdot y^4 + \dots$$

Bezeichnet nun  $\mathfrak{B}_e = \mu \cdot \mathfrak{H}_e$  die Induktion in der Äquatorebene,  $R$  den Äquatorialradius, dann ist der gesamte Induktionsfluß für den Äquator

$$\mathfrak{B}_m = 2 \pi \int_0^R \mathfrak{B}_e \cdot y \cdot dy = 2 \pi \mu \int_0^R \mathfrak{H}_e \cdot y \cdot dy,$$

oder

$$(14) \quad \mathfrak{B}_m = \pi \mu \left\{ \mathfrak{H}_0 \cdot R^2 + \frac{3}{4} a_3 \cdot R^4 - \frac{5}{8} a_5 \cdot R^6 + \dots \right\}.$$

Liefert die rechte Seite der Gleichung einen Wert, der mit der Maximalordinate der Kurve in Fig. 2 nahezu übereinstimmt, dann genügt die Zahl der bei der Rechnung verwendeten Konstanten  $\mathfrak{H}_0, a_3, a_5 \dots$ , um  $\mathfrak{H}_e$  als Funktion von  $y$



darzustellen, und es ist daher anzunehmen, daß dieselbe auch für die Berechnung von  $\xi_x$  und  $V$  genügt.

Formel (10), durch die das Potential für beliebige Stellen im Eisen berechnet werden kann, läßt sich zur Verzeichnung der Meridiane der Niveauflächen oder Nivaulinien, wie folgt, verwenden.

Man berechne mittels derselben für eine Anzahl von Punkten der beliebigen zur Achse  $AA$  parallelen Linie  $A_1 A_1$  (vgl. Fig. 9) die Werte des Potentials. Man kann dann mittels der erhaltenen Werte eine Kurve (vgl. Fig. 10) konstruieren, welche die Potentialverteilung auf  $A_1 A_1$  darstellt. Ebenso kann für eine zweite, dritte etc. Parallele  $A_2 A_2$ ,  $A_3 A_3$  ... verfahren werden. Aus der Kurve  $V_{\xi}$ ,  $\xi$  (vgl. Fig. 8), sowie aus denjenigen für  $A_1 A_1$ ,  $A_2 A_2$  ... können nun Abszissenwerte abgeleitet werden, die irgend einem bestimmten Potentiale

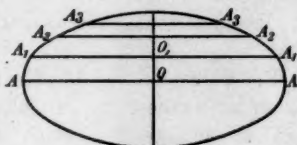


Fig. 9.

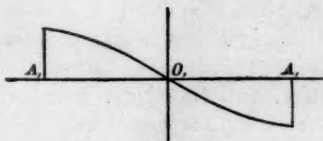


Fig. 10.

entsprechen. Die Eintragung dieser Abszissen in Fig. 9 liefert Punkte gleichen Potentials, durch welche somit eine Nivaulinie festgelegt wird. Die Wiederholung des Verfahrens für andere Potentialwerte gestattet beliebig viele Nivaulinien zu ermitteln. Offenbar können dieselben so verzeichnet werden, daß irgend zwei benachbarten Nivaulinien dieselbe kleine Potentialdifferenz entspricht, somit der reziproke Abstand zweier Kurven ein relatives Maß für die magnetische Kraft, Induktion und Magnetisierung an der betreffenden Stelle liefert.

Die Kraftlinien können als orthogonale Trajektorien der Nivaulinien verzeichnet werden. Dabei ist zu untersuchen, ob zeichnerisch überall rechtwinkliger Schnitt erreicht ist. Die betreffende Prüfung kann mittels zweier sich rechtwinklig kreuzender Geraden vorgenommen werden, die man auf ein Stück transparenten Papiere zeichnet. Dieses legt man auf das Kurvenbild und läßt den Scheitelpunkt des rechten Winkels

der Reihe nach mit den Schnittpunkten der Kurvensysteme zusammenfallen. Dabei ist zu untersuchen, ob es möglich ist, die beiden Schenkel des rechten Winkels zugleich als Tangenten der zwei betreffenden sich schneidenden Kurven erscheinen zu lassen. Diese Prüfung ist für alle Schnittpunkte durchzuführen. Abweichungen vom rechtwinkligen Schnitt sind zeichnerisch versuchsweise so lange zu korrigieren, bis überall rechtwinklige Kreuzung erreicht ist. Das Problem der zeichnerischen Auffindung der Niveaulinien (bez. Niveauflächen) und der Kraftbez. Magnetisierungslinien erscheint somit auf diesem Wege lösbar.

Bei Verzeichnung der Kraftlinien können deren Abstände so gewählt werden, daß an allen Stellen des Eisens die räumliche Liniendichte den relativen Wert der magnetischen Kraft in polarer oder elektromagnetischer Definition oder auch denjenigen der Magnetisierung darstellt. Zu dem Zweck entnimmt man aus der Kurve in Fig. 2 solche Werte von  $l$ , welche einem Anwachsen oder Abnehmen des Induktionsflusses  $\beta$  in arithmetischer Reihe bei kleiner Differenz  $\Delta\beta$  entspricht. Man kann dann auf der Meridiankurve des Eisenkörpers Punkte bestimmen, die auf Parallelkreisen liegen, so daß zwischen je zwei benachbarten der gleiche kleine Induktionsfluß ein- oder austritt. Legt man gerade diese Punkte an der Oberfläche in die zu verzeichnenden Kraftlinien, so begrenzen irgend zwei benachbarte einen Kraftkanal von kreisringförmigem Querschnitt, dem das gleiche  $\Delta\beta$  entspricht. Die räumliche Liniendichte liefert demnach ein Maß für die magnetische Kraft.

Im folgenden soll ein zweiter Weg, der sich zur Erreichung des angestrebten Zieles darbietet, besprochen werden. Es muß vorangeschickt werden, daß dabei ein gewisser geometrischer Satz vorausgesetzt wird, dessen exakter Beweis, obwohl ich den Satz für richtig halte, von mir bislang nicht hat erbracht werden können.

Außer der Kenntnis des Verlaufes von  $V_z$  in der Achse ist hier zunächst erforderlich diejenige der Potentialverteilung an der Oberfläche.

Bezeichnet  $V_i$  und  $\mathfrak{S}_i$  Potential und magnetische Kraft für einen Punkt  $p_i$  im Eisen unendlich nahe der Oberfläche

(vgl. Fig. 11), dann ist die Tangentialkomponente der Kraft dargestellt durch

$$\mathfrak{H}_i \cdot \sin \beta = - \frac{\partial V_i}{\partial l}.$$

Somit ist

$$(15) \quad V_i = - \int_0^l \mathfrak{H}_i \cdot \sin \beta \cdot dl.$$

Es ist ohne weiteres ersichtlich, daß für  $l=0$  das Potential gleich Null wird, ferner daß für ein gleich großes positives oder negatives  $l$  sich für  $V_i$  ein gleich großer negativer oder positiver Wert ergibt.

Man kann nun  $V_i$  auf geometrischem Wege ermitteln. Zufolge der Gleichung (4) ist

$$\mathfrak{H}_i = \frac{\sigma}{\pi \cdot \cos \beta},$$

somit

$$\mathfrak{H}_i \sin \beta = \frac{1}{\pi} \cdot \sigma \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{\mu}{\pi} \sigma \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

und daher

$$(16) \quad V_i = - \frac{\mu}{\pi} \int_0^l \sigma \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot dl.$$

Da durch die Kurven in Figg. 4 und 5 die Werte von  $\sigma$  und  $\operatorname{tg} \alpha$  als Funktionen von  $l$  gegeben sind, so kann für jedes beliebige  $l$  der Wert von  $-(\mu/\pi)\sigma \cdot \operatorname{tg} \alpha$  ermittelt werden, und es ist daher möglich, eine Kurve (vgl. Fig. 12) zu konstruieren,

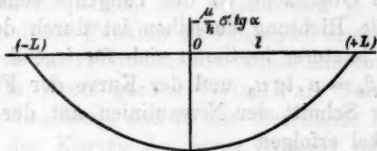


Fig. 12.

welche als Abszissen  $l$ , als Ordinaten  $-(\mu/\pi)\sigma \cdot \operatorname{tg} \alpha$  enthält. Für  $l=0$  wird  $\sigma \cdot \operatorname{tg} \alpha$  durch den unbestimmten Ausdruck  $0 \cdot \infty$  dargestellt. Falls der betreffende Wert nicht mit genügender Annäherung durch Interpolation zu finden ist, kann für  $l=0$

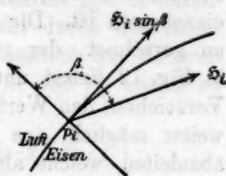


Fig. 11.

derselbe gleich  $-\dot{\Phi}_i \sin \beta$  sicherer nach Formel (13) für  $\dot{\Phi}_i$  berechnet werden, in welche der Oberfläche entsprechend  $y = R$  einzusetzen ist. Die Ausmessung der Fläche zwischen  $l$  von 0 an gerechnet, der zu  $l$  gehörenden Ordinate und der Kurve in Fig. 12 liefert unter Berücksichtigung des anzuwendenden Vorzeichens den Wert von  $V_i$  für das betreffende  $l$ . Somit ist es weiter möglich, aus Fig. 12 eine Integralkurve (vgl. Fig. 13) abzuleiten, welche als Abszissen  $l$ , als Ordinaten  $V_i$  enthält.

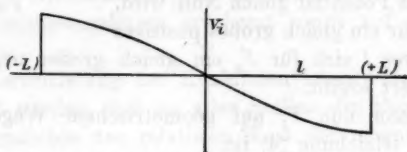


Fig. 13.

Aus den beiden Kurven  $V_i$ ,  $\xi$  (Fig. 8) und  $V_i$ ,  $l$  (Fig. 13) können nun beliebig viele zusammengehörige Werte von  $\xi$  und  $l$  entnommen werden, welche gleichen Werten von  $V_i$  und  $V_i$  entsprechen.

Durch zwei derartige Werte  $\xi$  und  $l$  sind aber korrespondierende Punkte auf der Achse und an der Oberfläche festgelegt, d. h. solche, welche einer und derselben Niveaufläche angehören. Es ist ersichtlich, daß so beliebig viele Paare von korrespondierenden Punkten ermittelt werden können. Dabei ist zu beachten, daß für je zwei solcher Punkte auch die Tangenten der Meridiane der Niveauflächen gegeben sind. Denn für die Oberfläche ist die Tangente senkrecht zu der Kraft  $\dot{\Phi}_i$ . Die Richtung derselben ist durch den Winkel  $\beta_0$  gegeben, und letzterer bestimmt sich für irgend ein  $l$  aus der Gleichung  $\tan \beta_0 = \mu \cdot \tan \alpha_0$  und der Kurve der Fig. 4. Außerdem muß der Schnitt der Niveaulinien mit der Achse unter rechtem Winkel erfolgen.

Man kann nun andererseits auch korrespondierende Punkte mit den zugehörigen Tangenten für die inneren Kraft- und Induktionslinien in der Oberfläche und der Äquatorebene, bez. der Meridiankurve des Rotationskörpers und einem mit ihr in gleicher Ebene liegenden Äquatorialhalbmesser auffinden.

Zu dem Zweck ist zunächst der Wert des Induktions-

flusses  $\mathcal{B}_e$  zu berechnen, der einen von der Mitte aus in der Äquatorebene beschriebenen Kreis vom Radius  $y_e < R$  durchsetzt. Aus Gleichung (13) ergibt sich dafür durch eine Rechnung, die sich von der auf p. 584 angestellten nur dadurch unterscheidet, daß hier  $\mathcal{B}_e$  und  $y_e$  an Stelle von  $\mathcal{B}_m$  und  $R$  zu setzen sind,

$$(17) \quad \mathcal{B}_e = \pi \mu \left\{ \mathcal{S}_0 \cdot y_e^2 + \frac{3}{4} a_3 \cdot y_e^4 - \frac{5}{8} a_5 \cdot y_e^6 + \dots \right\}.$$

Aus dieser Gleichung können beliebig viele Wertepaare von  $\mathcal{B}_e$  und  $y_e$  abgeleitet werden. Es ist daher möglich, eine Kurve zu konstruieren, welche  $\mathcal{B}_e$  als Funktion von  $y_e$  darstellt.

Andererseits ist durch die grundlegenden Versuche der Wert von  $\mathcal{B}$  an der Oberfläche als Funktion von  $l$ , also für einen beliebigen Parallelkreis gegeben (vgl. Fig. 2). Außerdem ist die Richtung der Kraft  $\mathcal{S}_i$  an der Oberfläche durch den Winkel  $\beta_0$  bekannt zufolge Gleichung (1) und der Fig. 4. Demnach ist es möglich, für einen beliebigen Induktionsfluß  $\mathcal{B} < \mathcal{B}_m$  die zugehörigen Werte von  $y_e$  und  $l$  zu bestimmen, d. h. somit den Radius des Kreises in der Äquatorebene und andererseits denjenigen eines Parallelkreises zu ermitteln, der den nämlichen Fluß  $\mathcal{B}$  umschürt.

Hiernach sind gegeben beliebig viele korrespondierende Punkte in der Oberfläche und in der Äquatorebene, d. h. solche, welche paarweise in derselben Magnetisierungslinie liegen. Dabei ist auch die Tangente der Kurve für jeden der Punkte bekannt.

Nach den vorstehenden Ausführungen lassen sich für beliebig viele Kurven sowohl des Systems der Magnetisierungslinien wie auch desjenigen der Niveaulinien je zwei Punkte und zugleich in diesen Punkten die Tangenten ermitteln. Ferner ist je eine Kurve beider Systeme, die Achse und der Äquatorialdurchmesser, in ihrem ganzen Verlaufe als Gerade bekannt. Endlich ist zu beachten, daß in der Oberfläche beliebig viele Schnittpunkte der Kurven des einen Systems mit denjenigen des anderen Systems gefunden werden können.

Da nun beide Kurvenscharen sich überall rechtwinklig durchkreuzen müssen, so halte ich es für höchst wahrscheinlich, daß unter diesen Umständen beide Kurvensysteme eindeutig bestimmt sind. Dafür den exakten Beweis zu erbringen, ist mir bis jetzt allerdings nicht gelungen.

Unter der Voraussetzung, daß eine solche Eindeutigkeit vorhanden ist, muß es möglich sein, durch versuchsweises Zeichnen von Kurven, von denen jede durch zwei korrespondierende Punkte so hindurchgeht, daß ihr Verlauf auch tangential zu den gegebenen Tangenten wird, zu zwei Kurvensystemen zu gelangen, die sich überall rechtwinklig durchkreuzen.

Man wird somit die Kurven unter Berücksichtigung der gegebenen Bedingungen in genügend großem Maßstabe zunächst versuchsweise zu verzeichnen haben. Hierauf ist in der p. 585 bis 586 beschriebenen Weise zu prüfen, ob die eine Schar als diejenige der orthogonalen Trajektorien der anderen Schar und v. v. erscheint. Abweichungen sind so lange zu korrigieren, bis überall rechtwinklige Kreuzung stattfindet. Daß auch bei diesem Verfahren die Niveau- und Kraftlinien in den für die Anschaulichkeit wünschenswertesten Abständen (vgl. p. 585 bis 586) verzeichnet werden können, ist ohne weiteres ersichtlich.

Man kann schließlich die beiden beschriebenen Methoden miteinander kombinieren und kommt damit zu einem dritten Wege, auf dem das Problem lösbar erscheint. Dieser ist naturgemäß umständlicher als jeder der beiden anderen, liefert indessen eine größere Anzahl von Bestimmungstücken und damit eine erhöhte Sicherheit bei der Ermittlung der Kurven.

Die Frage, ob und wie weit sich die Methoden zur praktischen Ausführung eignen, kann erst nach entsprechender Anwendung derselben erkannt werden.

Aachen, Mai 1907.

(Eingegangen 12. Mai 1907.)

# 11. *Der Inhalt der Gleichung $p \cdot v = R \cdot T$ ; von Rudolf Laemmel.*

Hr. Adler veröffentlichte in diesen Annalen<sup>1)</sup> einen Aufsatz über die analytische Formulierung des sogenannten „Ersten Hauptsatzes“, in welchem er den Gay-Lussacschen Überströmungsversuch als ein neues Element in der Spekulation neben der obigen Gleichung behandelt. Das ist unrichtig; denn sobald man für irgendwelche Körper die Gleichung

$$(1) \quad p \cdot v = R T$$

als gültig ansieht, folgt schon, daß die innere Energie  $U$  nur eine Temperaturfunktion ist (oder eine Funktion des Produktes von Druck mal Volumen; nicht, wie Hr. Adler sagt, eine Funktion von Druck und Volumen). Es gilt nämlich allgemein:

$$(2) \quad \frac{\partial U}{\partial v} = T \frac{\partial p}{\partial T} - p$$

und auch:

$$(3) \quad 1 = \frac{\partial p}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial v} \cdot \left( - \frac{\partial v}{\partial p} \right),$$

woraus sich ergibt, daß für alle Körper, die einer Zustandsgleichung

$$(4) \quad p = T \cdot \text{Funktion}(v)$$

folgen, die innere Energie vom Volumen unabhängig ist, etc.; insbesondere ist die innere Energie eines der Gleichung  $p \cdot v = R T$  folgenden Körpers wegen der allgemeingültigen Gleichung (2) etc. ohne weiteres eine bloße Temperaturfunktion.

Das Experiment ist nur Kontrollexperiment und zeigt weiter nichts, als daß das Gasgesetz  $p v = R T$  und damit alle seine Konsequenzen nur mehr oder minder genau stimmen, je nachdem was für ein Gas und unter welchen Umständen man es nimmt.

Unbegründet ist es, der Darstellung von Clausius deswegen eine *Unrichtigkeit* vorzuwerfen, weil Clausius die

1) F. W. Adler, Ann. d. Phys. 22. p. 782. 1907.



innere Energie, die er als Funktion von  $T$  erwiesen hatte, als von  $T$  und  $v$  abhängig analytisch formuliert. Das kann man immerhin noch tun, wenn es auch nicht viel Zweck hat. Es hat nämlich diese Darstellung noch mehr Berechtigung wie die Adlersche:

$$(5) \quad dU = \frac{dU}{dT} \cdot dT,$$

die ja doch eine völlige Identität ist und eigentlich gar keine Aussage mehr enthält:  $dU = dU$ . Statt (5) müßte man schreiben

$$(5') \quad dU = f(T) \cdot dT \quad \text{oder} \quad U = \int f(T) \cdot dT.$$

Erwärmt man ein ideales Gas langsam um  $1^\circ \text{C.}$ , so kann man es sich dabei auch langsam (vermittelt vieler kleiner hintereinander befindlicher Hähne, die je ein Stück Vakuum abgrenzen) gegen das Vakuum zu ausdehnen lassen. Man kann nun die Ausdehnung gegen das Vakuum so regulieren, daß die dadurch hervorgerufene Druckverminderung gerade durch die infolge der Erwärmung entstehende Druckvermehrung aufgehoben wird. Dehnt man nämlich bei der Erwärmung um  $1^\circ$  das Volumen um  $R/p$  aus, so ist die neue Temperatur

$$T_1 = T + 1 = \frac{pv + R}{R},$$

das neue Volumen

$$v_1 = v + \frac{R}{p} = \frac{pv + R}{p},$$

der neue Druck also

$$p_1 = \frac{RT_1}{v_1} = p. \quad 1)$$

Die Wärmemenge, die unter solchen Umständen zugeführt wird, ist die von Hrn. Adler in der erwähnten Arbeit als  $C_\pi$  bezeichnete Größe. Hr. Adler hat keine Angabe gemacht, wie dieses  $C_\pi$  („spezifische Wärme bei konstantem inneren Druck“) zu realisieren wäre. Wir haben nun die Möglichkeit der Realisierung dargetan. Aus unserer Darstellung folgt, daß  $C_\pi$  für alle diejenigen Körper, die der Gleichung (4)

1) Für Körper, die der Gleichung (4) folgen, ist die entsprechende Volumenvermehrung  $x$  pro Grad aus der Gleichung

$$p \cdot \{f(v) - f(v + x)\} = f(v) \cdot f(v + x)$$

zu berechnen.

folgen, ohne weiteres gleich  $C_v$  ist. (Also nicht bloß für ideale Gase, sondern auch noch für andere, vielleicht auch *reale* Körper.)<sup>1)</sup>

Denn einerseits ist dann

$$(6) \quad \frac{\partial C_v}{\partial v} = 0,$$

es kommt also auf dasselbe heraus, ob ich zuerst das Volumen  $v$  um  $1^\circ$  erwärme und dann gegen das Vakuum um  $R/p$  ausdehne, oder ob ich zuerst gegen das Vakuum ausdehne und dann erwärme. Andererseits wird die Temperatur eines solchen Körpers durch die Ausdehnung gegen das Vakuum nicht sinken. Also ist ohne weiteres

$$C_\pi = C_v$$

und zwar nicht nur für Körper, deren Zustandsgleichung  $p v = R T$  ist, sondern auch noch für andere Körper.

Im allgemeinen ist aber  $C_\pi$  natürlich nicht gleich  $C_v$  und insofern könnte man in der Darstellung des Clausius wirklich einen Mangel sehen, dessen Aufdeckung ein Verdienst war.

Zürich, 10. Mai 1907.

1) Dieses folgt aus der bekannten Beziehung

$$\frac{\partial C_v}{\partial v} + T \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial T^2} = 0$$

ohne weiteres.

(Eingegangen 23. Mai 1907.)

**12. Berechnung der Loschmidtschen Zahl  
aus den Konstanten der Dispersionsformel;  
von H. Erfle.**

Die Untersuchungen von P. Drude<sup>1)</sup> haben zu dem Resultat geführt, daß die Eigenschwingungen im Ultraviolett hervorgerufen werden durch die negativen Elektronen mit konstantem Verhältnis  $e/m = 1,5 \cdot 10^{17}$ ; <sup>2)</sup> er hat gezeigt, daß es möglich ist, die Zahl der Elektronen, die zu einer bestimmten Eigenwellenlänge  $\lambda_e$  gehört, pro Molekül aus den Konstanten der Dispersionsformel zu berechnen; außerdem ergibt sich ohne Benutzung dieser Konstanten ein unterer Grenzwert für die Summe schwingungsfähiger negativer Elektronen pro Molekül.

Da in dem Ansatz für die Dichte

$$(1) \quad d = \frac{\mathfrak{N}_e}{p_e} \cdot H \cdot M, \quad \text{?)}$$

der Quotient  $\mathfrak{N}_e/p_e$  die Zahl der Moleküle im Kubikzentimeter darstellt, so fehlt zur Bestimmung dieser Zahl nur noch  $\mathfrak{N}_e$ . Die vorkommenden Bezeichnungen haben folgende Bedeutung:

$\mathfrak{N}_e$  Zahl der Elektronen mit der Eigenwellenlänge  $\lambda_e$  pro 1 cm<sup>3</sup>;

$p_e$  Zahl der Elektronen der Gattung  $\lambda_e$  pro Molekül;

$\vartheta_e$  „Beweglichkeit“ der Elektronen dieser Gattung, d. h.  $\vartheta_e/4\pi$  gibt an, um wieviel ein Elektron mit der Ladung einer elektrostatischen Einheit durch eine elektrische Kraft 1 (elektrostatisch gemessen) aus der Ruhelage herausgezogen wird;

$H$  absolute Masse des Wasserstoffatoms;

$M$  Molekulargewicht der Substanz.

Die bekannte Kettelersche Dispersionsformel lautet:

$$(2) \quad n^2 = -k\lambda^2 + a^2 + \frac{D\lambda_e^3}{\lambda^3 - \lambda_e^3}.$$

Für Gase genügt meist die Gleichung:

$$(3) \quad n^2 = A + \frac{B}{\lambda^2}.$$

1) P. Drude, Ann. d. Phys. 14. p. 677—725, 936—961. 1904.

2) P. Drude, l. c. p. 711, 719.

3) P. Drude, l. c. p. 683.

$D$  ist die Dielektrizitätskonstante der Elektronengattung mit der Eigenwellenlänge  $\lambda_v$ ,

$$(4) \quad D = \mathfrak{N}_v \vartheta_v.$$

Nimmt man bei Gasen als erste Annäherung ein ultraviolettes Absorptionsgebiet an, dann ist

$$(5) \quad A = 1 + \mathfrak{N}_v \vartheta_v \quad \text{und} \quad B = \mathfrak{N}_v \vartheta_v \lambda_v^2.$$

Für die Eigenwellenlänge  $\lambda_h$  irgend einer Ionengattung besteht, solange die Reibungskoeffizienten  $r_h$  dieser Ionengattung klein sind, die Beziehung:

$$(6) \quad \lambda_h^2 = \frac{\pi m_h \vartheta_h}{e_h^2} \cdot 1)$$

1) P. Drude, l. c. p. 680. — Ich habe aus Beobachtungen von Pflüger (Wied. Ann. 65. p. 209, 210. 1898) z. B. für festes Cyanin das Verhältnis von  $r_h^2$  zu  $\frac{16 \pi m_h}{e_h^2 \vartheta_h}$  bestimmt und fand  $6 \cdot 10^{-4}$ ; es ergibt sich nämlich aus der Bewegungsgleichung eines Elektrons der Gattung  $\lambda_h$ :

$$m_h \frac{\partial \xi_h}{\partial t^2} = e_h' \cdot X - \frac{4 \pi e_h'^2}{\vartheta_h} \xi_h - r_h e_h'^2 \frac{\partial \xi_h}{\partial t}$$

( $e_h'$  elektrostatisch gemessen) für  $X=0$  die wahre Eigenwellenlänge  $\lambda_h'$ ; es ist:

$$(6') \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda_h'^2 &= \frac{\pi m_h \vartheta_h}{e_h^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{r_h^2 e_h'^2 \vartheta_h}{16 \pi m_h}} \\ &= \lambda_h^2 \cdot \frac{1}{1 - w}. \end{aligned} \right.$$

Nach Pflüger ist  $g_h$  in den Dispersionsformeln:

$$n^2(1-x^2) = 1 + \sum \frac{\mathfrak{N}_h \vartheta_h (\lambda^2 - \lambda_h^2) \lambda^2}{(\lambda^2 - \lambda_h^2)^2 + g_h^2 \lambda^2}$$

und

$$2 n^2 x = \sum \frac{\mathfrak{N}_h \vartheta_h g_h \lambda^3}{(\lambda^2 - \lambda_h^2)^2 + g_h^2 \lambda^2}$$

von der Größenordnung 0,019 bis 0,037 [ $\mu$ ].

Nun ist

$$g_h = \frac{c}{2} r_h \vartheta_h, \quad \text{wo} \quad c = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}},$$

daraus folgt für  $g_h = 3 \cdot 10^{-6} \text{ cm}$

$$r_h^2 = \frac{36 \cdot 10^{-19}}{c^2 \vartheta_h^2} \quad \text{und} \quad w = \frac{36 \cdot 10^{-19} \cdot e_h^2}{16 \pi m_h \vartheta_h} = \frac{36 \cdot 10^{-19}}{16 \lambda_h^2}.$$

Da  $\lambda_h^2 = 0,4 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^2$ , so wird  $w = 6 \cdot 10^{-4}$ ; noch besser gilt die Gleichung (6) als Näherung für (6'), wenn  $g_h$  von der Größenordnung  $10^{-3} \mu = 10^{-7} \text{ cm}$  ist, wie es Ketteler (Wied. Ann. 12. p. 517. 1881), für alkoholische Cyaninlösungen gefunden hat; man kann also hier, wie in anderen Fällen, in der Tat das die Reibung enthaltende Glied vernachlässigen.

Hierbei ist die Ladung des Ions,  $e_h$ , elektromagnetisch gemessen. Speziell für die Elektronen mit Eigenschwingungen im Ultraviolett gilt:

$$(7) \quad \vartheta_v = \lambda_v^2 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{e}{m} \cdot e.$$

Mit Benutzung der Zahlen

$$\frac{e}{m} = 1,5 \cdot 10^7 \left[ \frac{\text{E.M.E.}}{\text{g-Masse}} \right], \quad e = \frac{3,4 \cdot 10^{-10}}{3 \cdot 10^{10}} = 1,13 \cdot 10^{-20}$$

geht (7) über in

$$(8) \quad \vartheta_v = 5,395 \cdot 10^{-14} \cdot \lambda_v^2 [\text{cm}^2].$$

(2) liefert den Wert  $\lambda_v$ , (8)  $\vartheta_v$ , (4)  $\mathfrak{N}_v$  und die Anzahl der Moleküle im Kubikzentimeter ist

$$(9) \quad N = \frac{\mathfrak{N}_v}{p_v},$$

wobei

$$(10) \quad p_v \cdot \frac{e}{m} = 3,26 \cdot 10^{-4} \frac{M}{d} \frac{\mathfrak{N}_v \vartheta_v}{\lambda_v^2} \cdot 1)$$

Sobald also von einer Substanz die Konstanten der Dispersionsformel und die Dichte bestimmt sind, ist die Möglichkeit gegeben, die Loschmidtsche Zahl, d. h. die Zahl der Moleküle im Kubikzentimeter eines Gases bei 0° Temperatur und 760 mm Druck zu berechnen. Ist die Substanz, deren Dispersion gemessen ist, ein Gas (0°, 760 mm), dann ist  $\mathfrak{N}_v/p_v$  direkt die Loschmidtsche Zahl. Sind für eine Flüssigkeit die Konstanten der Dispersionsformel und die Dichte bestimmt, so ist aus (1) die absolute Masse eines Wasserstoffatoms berechenbar, und die Loschmidtsche Zahl ist

$$(11) \quad N = \frac{0,00008985}{2H}.$$

Zunächst verwende ich die Beobachtungen von K. Scheel<sup>2)</sup>

1) P. Drude, l. c. p. 683, 680. Der Faktor  $3,26 \cdot 10^{-4}$  ist

$$\frac{\pi}{e} = \frac{\pi}{0,965 \cdot 10^4},$$

da ja aus der Elektrolyse folgt

$$\frac{e}{H} = 0,965 \cdot 10^4.$$

2) K. Scheel, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Ges. Januar 1907.

über die Dispersion des Wasserstoffs und des Stickstoffs (gasförmig). Scheel gibt die Konstanten der Dispersionsformel

$$(12) \quad (n-1) \cdot 10^7 = A' + \frac{B'}{\lambda^2}$$

für Wasserstoff und Stickstoff bei 0° und 760 mm an; dann ist

$$(13) \quad (n^2-1) \cdot 10^7 = 2 A' + \frac{2 B'}{\lambda^2},$$

da  $n-1$  klein ist gegenüber 1.

Außerdem will ich noch die von Ketteler<sup>1)</sup> für Wasser angegebenen Konstanten der Formel (2) zur Berechnung von  $N$  verwenden.

#### 1. Wasserstoff.

$$n^2 = 1 + 2716,6 \cdot 10^{-7} + \frac{1810 \cdot 10^{-17}}{\lambda^2}.$$

Nach (5):

$$\lambda_v^2 = \frac{1810}{2716,6} \cdot 10^{-10} \text{ cm}^2 = 0,6663 \cdot 10^{-10} \text{ cm}^2, \text{ d. h. } \lambda_v = 82 \mu\mu.$$

$\vartheta_v = 3,595 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^3$ , und aus  $\Re_v \vartheta_v = 2716,6 \cdot 10^{-7}$  folgt  $\Re_v = 7,56 \cdot 10^{19}$ . Da nach Drude<sup>2)</sup>  $p_v = 2$ , so ist

$$N = \frac{\Re_v}{p_v} = 3,78 \cdot 10^{19}.$$

#### 2. Stickstoff.

$$n^2 = 1 + 5812,2 \cdot 10^{-7} + \frac{4494 \cdot 10^{-17}}{\lambda^2}.$$

Nach (5):

$$\lambda_v^2 = 0,7732 \cdot 10^{-10} \text{ cm}^2, \text{ d. h. } \lambda_v = 88 \mu\mu.$$

$\vartheta_v = 4,172 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^3$ ; aus  $\Re_v \vartheta_v = 5812,2 \cdot 10^{-7}$  folgt

$$\Re_v = 13,94 \cdot 10^{19}.$$

Nach (10) berechne ich  $p_v = 4,5$  mit  $d = 0,0012505$ ; somit ist

$$N = \frac{\Re_v}{p_v} = \frac{13,94}{4,5} \cdot 10^{19} = 3,1 \cdot 10^{19}.$$

1) E. Ketteler, Wied. Ann. 30, p. 308. 1887.

2) Nach V. Schumann, Ann. d. Phys. 4. p. 642–645. 1901 ist Wasserstoff vollständig lichtdurchlässig bis 100  $\mu\mu$ .

3) Ich berechne aus den Messungen Scheels  $p_v \cdot (e/m) = 2,83 \cdot 10^7$  bei 0° und 760 mm bez.  $2,18 \cdot 10^7$  bei –188° und 759 mm.

## 3. Wasser (flüssig).

Ketteler gibt für  $D$  und  $\lambda_v^3$  die folgenden Werte an:  
 $D = 0,4125$ ;  $\lambda_v^3 = 1,540 \cdot 10^{-10} \text{ cm}^3$ ; d. h.  $\lambda_v = 124 \mu\mu$ .<sup>1)</sup>  
 $p_v = 1$  nach Drude.<sup>2)</sup> Ich berechne nach (8), (4), (11), (9):

$$\vartheta_v = 8,3 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^3; \quad \mathfrak{R}_v = 0,5 \cdot 10^{+23};$$

$$H = \frac{1}{0,5 \cdot 10^{23} \cdot 18} = \frac{1}{9} \cdot 10^{-23} \text{ g}$$

und

$$N = 0,00008985 \cdot \frac{9}{2} \cdot 10^{+23} = 4,0 \cdot 10^{19}.$$

Die drei von mir für  $N$  berechneten Werte stimmen gut mit dem von Planck aus den Konstanten der Planckschen Spektralgleichung berechneten überein:  $2,76 \cdot 10^{19}$ ; die kinetische Gastheorie ergibt  $N$  zwischen  $2 \cdot 10^{19}$  bis  $10 \cdot 10^{19}$ .

Von Interesse ist noch die Berechnung der Maximalamplitude der Elektronenbewegung  $\xi_v$  aus der Bewegungs-gleichung eines Elektrons für den stationären Zustand

$$\frac{\partial \xi_v}{\partial t} = 0 = \frac{\partial^2 \xi_v}{\partial t^2},$$

wenn  $X = 0,016$  (elektrostatisch gemessen) die maximale elektrische Feldstärke für Sonnenlicht<sup>3)</sup> ist; dann wird

$$3,4 \cdot 10^{-10} \cdot \xi_v = \frac{10^{-23}}{4\pi} \cdot 0,016;$$

dabei habe ich mit  $\vartheta_v = 10^{-23}$  gerechnet.  $\xi_v$  wird von der Größenordnung  $4 \cdot 10^{-17} \text{ cm}$ <sup>4)</sup>; zum Vergleiche sei auf den Mittelwert für den Molekulardurchmesser:  $2 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$  hingewiesen.

München, Physik. Inst. d. Techn. Hochschule.

1) Reines Wasser ist bis  $200 \mu\mu$  äußerst durchsichtig, bei  $186 \mu\mu$  ist nach H. Kreusler, Ann. d. Phys. 6. p. 412—423. 1901 die Absorption schon sehr stark (68,9 Proz.).

2) P. Drude, l. c. p. 693.

3) P. Drude, Lehrb. d. Optik 2. Aufl. p. 443.

4) Einen ähnlichen Wert berechnet Drude aus der Dispersion der Metalle, Physik. Zeitschr. 1. p. 161—165. 1900.

(Eingegangen 28. Mai 1907.)



**13. Zur Lambschen Gittertheorie;  
von Clemens Schaefer und Max Laugwitz.**

In einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> haben wir die Resultate einer von J. J. Thomson<sup>2)</sup> herrührenden Theorie des Hertzschen Drahtgitters mit der Erfahrung verglichen, und kamen dabei zu dem Ergebnisse, daß „die Thomsonsche Theorie die Existenz, das Vorzeichen und den Gang des bei der Reflexion auftretenden Phasenverlustes qualitativ richtig angibt, daß sie dagegen die Beobachtungen quantitativ in keiner Weise darzustellen vermag“.

Eine andere Gittertheorie war uns damals nicht bekannt.

Durch eine inzwischen erschienene Arbeit von Godfrey H. Thomson<sup>3)</sup> wurden wir indessen darauf aufmerksam, daß außer der Thomsonschen noch eine Gittertheorie von H. Lamb<sup>4)</sup> vorliegt.

Unsere Messungen gestatten es nun, auch diese Theorie zu prüfen. Wir geben in der folgenden Tabelle die von uns beobachteten, die nach Lamb und nach J. J. Thomson berechneten Werte der Phasendifferenz  $\alpha$  an; die beiden ersten Kolonnen enthalten die Konstanten der Gitter, an denen die Versuche angestellt wurden ( $c$  = Drahtradius,  $a$  = Drahtabstand).

$c$	$a$	$\alpha$ beob.	$\alpha$ nach Lamb	$\alpha$ nach J. J. Thomson
0,015 cm	0,38 cm	0,48 cm	0,17 cm	0,48 cm
	0,75 "	0,58 "	0,48 "	1,00 "
	1,50 "	1,2 "	1,14 "	2,60 "
	3,00 "	1,93 "	1,98 "	6,6 "
0,0025 "	3 "	2,2 cm	2,3 cm	10 cm
0,015 "		1,93 "	1,98 "	6,6 "
0,06 "		1,5 "	1,54 "	4,0 "
0,1 "		1,35 "	1,23 "	3,0 "

1) Cl. Schaefer u. Max Laugwitz, Ann. d. Phys. 21. p. 587. 1906.

2) J. J. Thomson, Recent researches in Electr. and Magn. p. 425 ff.

3) G. H. Thomson, Straßb. Inaug.-Diss. 1906; auch Ann. d. Phys. 22. p. 365. 1907.

4) H. Lamb, Proc. of the Lond. Math. Soc. 29. p. 523. 1898.

Wie man sieht, ist die Übereinstimmung zwischen den beobachteten und nach Lamb berechneten Werten recht befriedigend, namentlich wenn man die starke Abweichung der Thomsonschen Theorie bedenkt. Auch Hr. G. H. Thomson hat in der schon genannten Arbeit nach *vollständig anderer Methode* einen recht guten Anschluß der Beobachtungen an die Lambsche Theorie erzielt.

Man darf daher die Lambsche Theorie innerhalb der Grenzen der Untersuchung von G. H. Thomson und uns als vollkommen hinreichend ansehen.

Breslau, Physik. Institut der Universität, im Mai 1907.

(Eingegangen 22. Mai 1907.)

